Wykłady

z

wstępu do rachunku prawdopodobieństwa

Wykładał:

Prof. zw. dr hab.

Tomasz Łuczak

Przepisywali:

Marcin Armacki

Marcin Woźniak

26 czerwca 2019

Spis treści

1 Wykład - 26.02.2019

1.1 Informacje ogólne

`http://tomasz.amu.edu.pl/wrp/wrp.html`

Zaliczenie od 51%

Egzamin pisemny na koniec.

1.2 Po co informatykowi rachunek prawdopodobieństwa?

ZASTOSOWANIA:

- Algorytmy losowe - 50% komputerów w Polsce zainfekował wirus znajdź przynajmniej jeden taki komputer. Jeżeli będzie 100 komputerów to $(1 - \frac{1}{2})^{100} = 10^{-10}$
- Badanie średniego czasu algorytmu
- Zero - knowleage proofs
- Statystyka

1.3 Definicja klasycznego prawdopodobienstwa

Definicja 1.1. Klasyczne prawdopobieństwo - eksperymnent losowy, którym można uzyskać jako $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

Ω - zbiór zdarzeń elementarnych (zbiór wszystkich możliwości wyników

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

Przykłady

- Rzut monetą

  $\Omega = \{O, R\}$
- Rzut kostką

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Rzut dwiema monetami

  $\Omega_1 = \{(O, O), (O, R)\} = \{(O, R), (O, O), (R, O), (R, R)\}$

  $\Omega_2 = \{\{O, O\}, \{O, R\}\{R, R\}\}$

$A \subset \Omega$ to zdarzenie

$\omega \subset \Omega$ to zdarzenie elementarne

Wzór na klasyczną definicję prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Przykładowe zadanie 1.

A - zdarzenie, te rzucając kostką wyrzucamy parzystą liczbę oczek

$A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B - zdarzenie, że rzucając dwoma indentycznymi monetami otrzymamy dwa orły

$P(B) = \frac{1}{4}$

UWAGA!! W makro świecie wszystkie obiekty są rozróznialne.

Przykładowe zadanie 2.

W urnie są dwie kule białe i 5 czarnych. Losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula jest biała?

$\Omega = 7$

$C = 2$

$P(C) = \frac{2}{7}$

Liczba ciągów (z powtórzeniami) o długości k, którego elementami zbioru $\{1...n\} \leftrightarrow n \in N$

$n * n * ... * n = n^k$

Liczba ciągów bez powtórzeń o długości k, że zbioru n wynosi

$n * (n-1) * (n-2)... = (n-k+1) = n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Liczba permutacji zbioru $\{1, 2...n\}$

$n(n-1)(n-2)...2 * 1 = n!$

Liczba podzbiorów k-elementowych $\{1, ..., n\}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$

Z urny, której znajdują się 2 białe i 5 czarnych kul wybieramy dwie kule:

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie kule są białe?

$\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{i,j\}\} \leftrightarrow i \leqslant j \leqslant 7$

$\Omega = \binom{7}{2} = \frac{7*6}{1*2} = 21$

$A = \{1,2\}$

$|A| = 1$

$P(A) = \frac{1}{27}$

b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula jest biała:

$B_{\geqslant 1}$ - przynajmniej jedna kula jest biała.

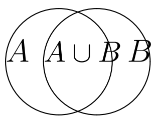
$B_{\geqslant 1} = B_1 \cup B_2$

$P(B_2) = \frac{1}{21}$

$|B_1| = \binom{2}{1}\binom{3}{1} = 2 * 5 = 10$

$P(B_2) = \frac{1}{21} + \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$

$A, B \subset \Omega$



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jeśli A jest zdarzeniem to $A^c = \Omega \backslash A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym.

$P(A^c) = \frac{|\Omega \backslash A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - P(A)$

Zadanie Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierając 13 kart z 52 otrzymamy 3 piki i 4 kiery??

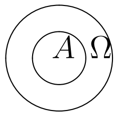
$|\Omega| = \binom{52}{13}$

$|A| = \binom{13}{3}\binom{13}{4}\binom{26}{6}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{4}\binom{26}{6}}{\binom{52}{13}}$

2 Wykład - 5.03.2019

2.1 Prawdopodobieństwo geometryczne



$$P(A) = \frac{Miara(A)}{Miara(\Omega)}$$

Jeżeli małe koło ma $r = \frac{1}{2}$ a duże $R = 1$

To w tym przypadku: $P(A) = \frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}$

A jakie jest prawdopobieństwo, że trafimy w środek koła?

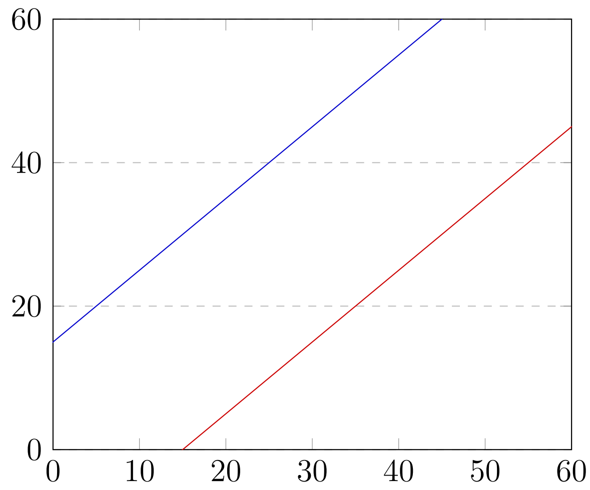
$P(C) = \frac{Pole(C)}{Pole(\Omega)} = \frac{0}{\pi} = 0$

Zadanie 1. Janek i Marysia umówi się na spotkanie w kawiarnii między czwartą a piątą. Każde z nich przychodzi w losowym momencie między czwartą a piątą.:

a) jakie jest prawdopodobieństwo, że pojawią się w kawiarnii w tym samym momencie?

b) przypuśmy, że każde z nich czeka dokładnie 15 min. Jakie prawdopodobieństwo, że się spotkają?

Rysunek poglądowy:



a) $\Omega_j = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 60\}$

$\Omega_y = \{y : 0 \leqslant y \leqslant 60\}$

$\Omega = \{x, y : 0 \leqslant x, y \leqslant 60\}$

A - przyszli równocześnie $\{x, y \in \Omega : x = y\}$

$P(A) = \frac{Pole(d)}{Pole(\Omega)} = \frac{0}{60^2} = 0$

b) B - zdarzenie, że J i M się spotkają

$B = \{(x, y) \in \Omega : |y - x| < 15\}$

$|y - x| < 15$

$15 < y - x < 15$

$x - 15 < y < 15 + x$

$P(B) = \frac{pole(pomidzy-prostymi)}{pole(\Omega)} = \frac{60-45*45}{60} = \frac{7}{16}$

2.2 Niezależność zdarzeń

Definicja 2.1. Zadarzenia A i B są niezależne jeśli:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

UWAGA To, że zdarzenie $A, B \in \Omega$ są niezależne, to (BYNAJMNIEJ), nie znaczy, że AiB są rozłączne.

Zdarzenie $\{A_i \ i \in I\}$ są niezależnie gdy jeśli dla każdego (skończonego) $J \subseteq I$ mamy:

$$\forall_{J \in I} \ P(\cap_{j \in J}) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Na przykład: $A, B, C \subseteq \Omega$ są **niezależne** gdy zachodzą WSZYSTKIE równości:

1) $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

2) $P(A \cap C) = P(A) * P(C)$

3) $P(B \cap C) = P(B) * P(C)$

4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

Zadanie 2. Rzucamy dwa razy monetą. Zdarzenie A - w pierwszy rzucie wypadnie orzeł, B - wypadnie reszka w drugim rzucie, C - w obu rzutach ten sam wynik. Czy A,B,C są niezależne?

$\Omega = \{$ (O,O),(O,R),(R,O),(R,R)$\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B \cap C) = 0$

1)Równość TAK

2)Równość TAK

3)Równość TAK

4)Równość **NIE**

Nie zachodzi 4) równość więc zdarzenie A, B, C => nie są niezależne, ale równości 1), 2), 3) nazywamy zdarzenie parami niezależne.

Zadanie 1. (Ciąg dalszy) Niech $J_{\leqslant k}$ oznacza, że Janek przyszedł do kawiarni przed czwartą minut k (przed 4:k)

c) Czy zdarzenie B jest niezależne?

$P(J_{\leqslant 15} \cap B) = P(J_{\leqslant 15}) * P(B)$

$P(B) = \frac{7}{16}$

$P(J_{\leqslant 15}) = \frac{1}{4}$

$P(J_{\leqslant 15} \cap B) = \frac{3}{32}$

$X = P(P(J_{\leqslant 15} \cap B)) = \frac{pole(P(J \cap B))}{pole(\Omega)} = \frac{15*15+\frac{1}{2}*15*15}{15^2} = \frac{3}{32}$

$P(J_{\leqslant 30}) = \frac{1}{2}$

$Z = P(J_{J \leqslant 30} \cap B) = \frac{1}{2} * \frac{7}{16}$

$X = Z$

NIEZALEŹNOŚĆ POTWIERDZONA

Zadanie 3. Pradoks Bertranda

Znaleźć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu, że ma długość większą niż bok trójkąta wpisanego w ten okrąg.

I sposób

Zaznaczamy dwa losowe punkty

$\Omega = \{\alpha : 0 < \alpha \leqslant 2\pi\}$

$A = \{\alpha : \frac{2}{3}\pi < \alpha \leqslant \frac{4}{3}\pi\}$

$P(A) = \frac{dl(A)}{dl(\Omega} = \frac{\frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3}$

II sposób

$\Omega = \{x : -1 < x < 1\}$

$A = \{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$

$P(A) = \frac{dl(A)}{dl(\Omega)} = \frac{1}{2}$

III sposób

Ω - koło o promieniu 1 bez brzegu

A - koło o promieniu $\frac{1}{2}$ bez brzegu

$P(A) = \frac{pole(A)}{pole(\Omega)} = \frac{1}{4}$

3 Wykład 12.03.2019

3.1 Własności prawdopodobieństwa

1) $P(A^c) = 1 - P(A)$

2) $P(\emptyset) = 0$

3) Jeśli $A \supseteq B$, to $P(A) \geqslant P(B)$

4) $P(A \cup B) = P(A) - P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$

6) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

3.1.1 Dowód

$P(\Omega) = 1$

$P(A \cup A^c) = 1$ te dwa zdarzenia są rozłączne

$P(A) + P(A^c) = 1$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

3.1.2 Dowód

$P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0$

3.1.3 Dowód

$P(A) = P((A \setminus B) \setminus B) = P(A \setminus B) + P(B) \geqslant P(B)$

3.2 Przestrzeń probablistyczna

Definicja 3.1. **Przestrzenią probailistyczną** nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest **zbiorem zdarzeń elementarnych**, $\mathcal{F}$ jest porządną rodziną podzbiorów, której elementy nazywamy **zdarzeniami**, a $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ jest **funkcją prawdopodobieństwa** taką, że:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla dowolnego zdarzenia $\Omega \subseteq \Omega$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Dla ciągu parami rozłącznych zdarzeń A_1, A_2,..., zachodzi $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$

Definicja 3.2. Niech $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ będą dina orzestrzeniami probabilistycznymi. Iloczynem (produktem) tych przestrzeni nazywamy przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gdzie $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie zbiory typu $A_1 \times A_2$, gdzie $A_1 \in \mathcal{F}_1$ i $A_2 \in \mathcal{F}_2$, oraz dla takiej pary zbiorów mamy

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) * P_2(A_2).$$

Przykłady:

Schemat Bernulliego $\tau_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, ..., n$

Rozkład geometryczny $\sigma = p(1 - p)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, 3...$

3.3 Przestrzeń warunkowa

Definicja 3.3. Jeśli $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, a $B \in \mathcal{F}$ jest zdarzeniem, dla którego $P(B) > 0$, wtedy możemy skonstruować przestrzeń warunkową $(B, \mathcal{F}_B, P_B)$ przyjmując

$$\mathcal{F} = \{F \cap B : F \in \mathcal{F}\},$$

a dla każdego $A \in \mathcal{F}$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3.4 Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B

UWAGA Jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to

$$P(A|B) = P(A) \text{ i } P(B|A) = P(B)$$

zakładając, że $P(A)$ oraz $P(B) > 0$

Zadanie 1. W urnie znajdują się 2 kule białe i 3 czarne. A-tego samego koloru B-przynajmniej jedna

1) Znajdź $P(A \setminus B)$ oraz $P(B \setminus A)$

$P(A) = \frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$

$P(B) = \frac{\binom{2}{1}+\binom{3}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{9}{10}$

$P(A \cap B) = \frac{\binom{3}{2}}{10} = \frac{3}{10}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{4}$

Zadanie 2. Wrzucamy z powrotem kule do urny i powtarzamy do momentu gdy wyciągniemy dwie kule tego samego koloru. Znajdź prawdopodobieństwo, że zdarzy się to w trzeciej rundzie.

Sukces - wyciągnięcia kul tego samego koloru.

$p = P(A) = \frac{4}{10}$
$1 - p = \frac{6}{10}$

D_3 - doświadczenie trwa 3 rundy.
$P(D_3) = (1 - \frac{4}{10})(1 - \frac{4}{10})\frac{4}{10} = \frac{6*6*4}{1000}$

Zadanie 3. Niech E będzie zdarzeniem, że w pierwszej rundzie wyciągneliśmy conajmniej jedną kulę czarną. Znajdź prawdopodobieństwo $P(E|D_3)$

$P(E|D_3) = \frac{P(E \cap D_3)}{P(D_3)} = 1$

Zadanie 4. Znajdź, że w 10 rundzie, że 3 razy wyciągnąć kulę tego samego koloru.

$\tau_3 = \binom{10}{3}^{rund}(0,4)^3(1-0,7)^3$

4 Wykład - 19.03.2019

4.1 Prawdopodobieństwo całkowite. Wzór Bayesa

Twierdzenie 4.1. (Wzór łańcuchowy.) Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ spełniają warunek $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}$ to

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A1) * ... * P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Twierdzenie 4.2. Jeśli $B_1, B_2, ..., B_k \in \mathcal{F}$ są podziałem Ω na rozłączne zdarzenia o dodatnik prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ mamy

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \setminus B_i)P(B_i)$$

a dla każdego j = 1,2,...,k

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Zadanie 1. W urnie znajdują się 3 kule czerwoną i 2 niebieskie i jedna kula czerwona.

1) Jeśli kula jest czerwona wrzucamy ją i z powtorem do urny.

2) Jeśli kula jest niebieska wyrzucamy kulę.

C_i - czerwona kula na i-tej pozycji.

N_i - niebieska kula na i-tej pozycji.

$P(C_1 \cap N_2 \cap C_3) = P(C_1) + P(N_2|C_1)P(C_3|C_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{3}{4} = \frac{18}{100}$

Zadanie 2. Z urny z poprzedniego zadania po pierwszej rundzie wyciągamy dwie kule.

1) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięto kule różnych kolorów.

2) Przypuśmy, że kule są różnych kolorów. Znajdź prawdopodobieństwo, że w pierwszej rundzie wyciągneliśmy kulę czerwoną.

R - w drugiej rundzie różne kolory

C_1 - pierwsza kula czerwona.

$P(C_1|R) =?$

$P(C_1) = \frac{3}{5}$

$P(N_1) = \frac{2}{5}$

$P(R|C_1) = \frac{\binom{3}{1}*\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}$

$P(R|N) = \frac{\binom{3}{1}*\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$

$P(R) = P(R|C_1)P(C_1) + P(R|N_1)P(N_1) = \frac{3}{5} * \frac{3}{5} + \frac{1}{2} * \frac{2}{5} = \frac{14}{25}$

$P(C_1|R) = \frac{P(R|C_1)P(C_1)}{P(R|C_1)P(C_1)+P(R|N_1)P(N_1)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{14}{25}} = \frac{9}{14}$

Zadanie 3.

		Szance wygrania
Elf	0,5	0,1
Rycerz	0,3	0,2
Karł	0,2	0,5

1) Jaka jest szansa, że ukończymy gre?

2) Przypuśmy, że ukończyliśmy grę. Znajdź prawdopodobieństwo, że ostatnią walkę stoczyliśmy z elfem.

Z - zwycięstwo

E - walczymy z elfem

R - walczymy z rycerzem

K - walczymy z karłem

$P(Z|E) = 0,1$

$P(Z|R) = 0,2$

$P(Z|K) = 0,5$

$P(Z) = P(Z|E)P(E)+P(Z|R)P(R)+P(Z|K)+P(K) = 0,1*0,5+0,3*0,2+0,5*0,2 = 0,21$

$P(E|Z) = \frac{P(Z|E)P(E)}{P(Z)} = \frac{0{,}05}{0{,}21} = \frac{5}{21}$

5 Wykład - 26.03.2019

5.1 Zmienna losowa

Definicja 5.1. **Zmienną losową X** określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy funkcję (niezależną) $X : \Omega \to R$

Definicja 5.2. Zmienna losowa X jest **dyskretna** jeśli istnieje przeliczalny zbiór atomów $A = \{a_1, a_2, ...\}$ taki, że $\sum_{a \in A} P(X = a) = 1$

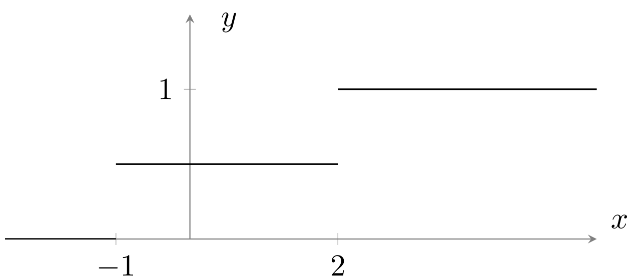
5.2 Rozkład zmiennej losowej

Definicja 5.3. **Rozkładem zmiennej losowej dysktetnej X** nazywamy funkcję $f : A \to [0, 1]$ zdefiniowaną wzorem $f(a) = P(X = a)$. Wygodnie podawać rozkład w formie tabelki.

5.3 Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja 5.4. **Dystrybuantą zmiennej losowej** nazywamy funkcję $F_x : R \to [0, 1]$ zdefiniowaną wzorem $F_x = P(X \leqslant x) = P(X^{-1}((-\infty, x]))$

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } -1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{gdy } x \geqslant 2 \end{cases}$$



5.4 Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej

Definicja 5.5. **Wartością oczekiwaną zmiennej losowej dyskretnej X** nazywamy liczbę $EX = \sum_{a \in A} a * P(X = a)$

UWAGA Jeśli szereg po prawej stronie równanie **nie** jest bezwzględnie zbieżny, to mówimy, że wartości oczekiwane nie istnieje.

Zadanie 1. W urnie są dwie kule białe, dwie czarne i jedna niebieska. Wyciągamy z urny dwie kule:

1) Jeżeli wyciągamu białą i niebieska to wyciągamy -10

2) w pozostałych przypadkach dostajemy :

za niebieską - 0

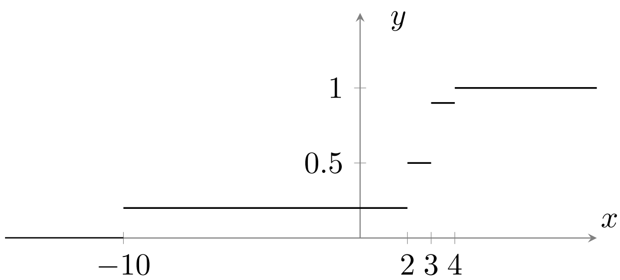
za białą - 1

za czarną - 2

X - wygrana w tej grze

x	2	3	4	-10
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < -10 \\ 0.2 & \text{gdy } -10 \geqslant x < 2 \\ 0.5 & \text{gdy } 2 \geqslant x < 3 \\ 0.9 & \text{gdy } 3 \geqslant x < 4 \\ 1 & \text{gdy } x \geqslant 4 \end{cases}$$



Zadanie 2. Rzucamy monetą do momentu gdy nie wyrzucimy orła. Jeśli do tego momentu wykonamy "iżzutów wygrywamy 3^i złotych. Znajdź rozkład.

$\Omega = \{O, RO, RRO, RRRO, ...\} \cup \{RRRRRR...\}$

$$P(X = 3^i) = P(\{\underbrace{RR...R}_{i-1}O\}) = \underbrace{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * ... * \frac{1}{2}}_{i-1} * \tfrac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^i$$

$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = 3^i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

$EX = \sum_{i=1}^{\infty} 3^i P(X = 3^i) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^i * \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{3}{2})^i = \infty$

WARTOŚĆ OCZEKIWANA NIE ISTNIEJE

- zmieńmy 3^i na $(-1)^i * 3^i$

$P(X = -3^i) = \frac{1}{2^i}$

$EX = \sum_{i=1}^{\infty} (-3)^i P(X = 3) = \sum_{i=1}^{\infty} (-3)^i * \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} -(\frac{3}{2})^i$

NIE ISTNIEJE

- zmieńmy 3^i na $(\frac{3}{2})^i$

$P(X) = (\frac{3}{2}^i) = \frac{1}{2^i}$

$EX = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{3}{2})^i P(X = 3) = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{3}{2})^i * \frac{1}{2^i} = 3$

6 Wykład - 2.04.2019

6.1 Zmienne losowe X

6.1.1 Prawo leniwego statystyka dla X

Twierdzenie 6.1. (Prawo leniwego statystyka). Niech X będzie zmienną losową dyskretną o wartości $\{x_1, x_2, ...\}$ i $g : R \to R$ będzie funkcją, wtedy

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P(X = x_i)$$

6.1.2 Wartość oczekiwana

Definicja 6.1. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej dyskretnej X o wartości (atomach) $\{x_1, x_2, ...\}$ nazywamy liczbę

$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

6.2 Zmienne losowe wielowymiarowe

6.2.1 Rozkład łączny

Definicja 6.2. Rozkład (łączny), lub funkcję masy prawdopodobieństwa, zmiennej losowej(X, Y)

definiujemy podając wszystkie wartości

$$p_{i,l} = P(X = x_i, Y = y_l)$$

Wtedy $\sum_{i,l} p_{i,l} = 1$

6.2.2 Rozkład brzegowy X,Y

Definicja 6.3. Rozkłady brzegowe zmiennych X i Y obliczamy za pomoca wzorów

$$P(X = x_i) = \sum_l P(X = X_i, Y = y_l)$$

$$P(Y = y_l) = \sum_i P(X = X_i, Y = y_l)$$

6.2.3 Niezależność zmiennych losowych X,Y

Jeśli dla **wszystkich** wartości (x_i, y_l) zachodzi

$$P(X = x_i, Y = y_l) = P(X = x_i)P(Y = y_l)$$

6.2.4 Prawo leniwego statystyka X,Y

Twierdzenie 6.2. Niech (X,Y) będzie zmienną losową dyskretną o wartościach $\{(x_i, y_l) : i, l = 1, 2...\}$ i $g : R^2 \to R$ będzie funkcją, wtedy

$$E(g(X, Y)) = \sum_{i,l} g(x_i, y_l)P(X = x_i, Y = y_l)$$

np.

$$E(X^2, Y) = \sum_{i,l} g((x_i)^2, y_l)P(X = x_i, Y = y_l)$$

6.2.5 Wariancja

Definicja 6.4. Wariancją zmiennej losowej nazywamy

$$VarX = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$$

6.3 Kowariancja

Definicja 6.5. Kowariancją zmiennej losowej(X,Y) nazywamy liczbę

$$Cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - EX * EY$$

6.3.1 Współczynnik korelacji

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX * VarY}}$$

Zadanie 1. Dana jest zmienna losowa X o rozkładzie:

x	-2	-1	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = 2x^2$

Rozkład zmiennej losowej Y

y	0	2	8
$P(Y = y)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$EY = 0 * \frac{3}{10} + 2 * \frac{6}{10} + 8 * \frac{1}{10} = 2$

$EX = -2 * \frac{1}{10} + (-1) * \frac{2}{10} + 0 * \frac{3}{10} + 1 * \frac{4}{10} = 0$

6.4 Własności wariancji

1) $VarX \geqslant 0$

2) $VarX = E(X^2) - (EX)^2$

3) $Var(aX + b) = a^2 VarX$

Dowód **2)**

$EX = \mu$

$VarX = E(X - EX)^2 = E((x-\mu)(x-\mu)) = E[x^2 - 2\mu x + \mu^2] = E(x^2) - 2\mu EX + \mu^2 = E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X)^2 - (EX)^2$

Dowód **3)**

$Var(aX = b) = E(aX+b-E(aX+b))^2 = E[(aX+b-aEX-b)^2] = E[a^2(X-EX)^2] = a^2 VarX$

Zadanie 2. Rzucamy dwoma kostkami rozróżnianymi kostkami. Jeśli na pierwszej kostce jest "6", to pierszy gracz wygrywa 3. Kiedy liczba jest nieparzysta to "wygrywa"1 (przeg.) w przypadku remisu wygrywa 2. Drugi gracz wygrywa 2, gdy suma kostek jest parzysta, a gdy przegrywa 2(niep.) Znajdź rozkład zmiennej losowej (X,Y)

y,x	-1	0	3	
-2	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} * \frac{1}{2}$	P(X=3,Y=-2)=$\frac{1}{6} * \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} * \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} * \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

$EX = (-1)(-2)P(X = -1, Y = -2) + ... = 0$

6.5 Własności $\rho(X, Y)$

1) Jeśli X,Y są niezależne to $\rho(x, Y) = 0$ (i $Cov(X, Y) = 0$) **ale nie odwrotnie!**

2) $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$

Zadanie 3. Dane są takie same jak w **zadaniu 2** (suma na iloczyn).

y,x	-1	0	3	
2	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$
-2	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

$EXY = (-1) * (-2) * \frac{1}{4} + (-1) * 2 * \frac{1}{4} + 2 * 0 * \frac{2}{6} + 3 * 2 * \frac{1}{6} = 1$

$EX = (-1) * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{3} + 3 * \frac{1}{6} = 0$

$Cov(X, Y) = EXY - EX * EY = 0$

Zadanie 4. Wyciągamy jedną kulę z I urny, i jedną z II urny.

X - liczba wyciągniętych białych kul.

Znajdz EX.

	ILOŚĆ	KUL
I Urna	2 białe	2 czarne
II Urna	1 biała	2 czarne

x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{2} * \frac{2}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3}$

$EX = 0 * \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 2 * \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$x = x_1 + x_2$

x_1 - liczba białych kul wyciągniętych z 1 urny.

x_2 - liczba białych kul wyciągniętych z 2 urny.

$EX_1 = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = o * P(X_1 = 0) + 1 * P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$

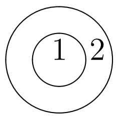
$EX_2 = P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$

$EX = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

7 Wykład - 16.04.2019

7.1 Zmienne losowe ciągłe

Zadanie 1. Strzelamy do okrągłej tarczy o promieniu 2. Jeśli trafimy w centralne kółko o promieniu 1 (wygrana 10). W przeciwnym przypadku wygrywamy 1. Znajdź rozkład i dystrybuantę wygranej X.

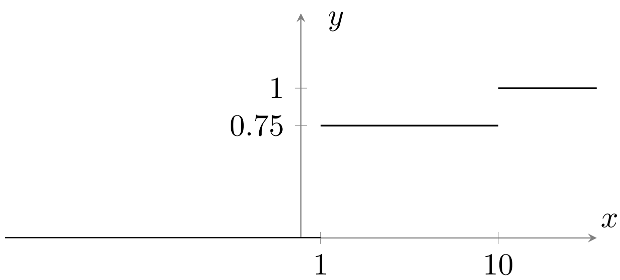


Koło o promieniu 1 - wygrana 10.

Koło o promieniu 2 - wygrana 1.

X	10	1
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

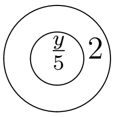
P(X=10) $= \frac{\pi * I^2}{\pi * 2^2} = \frac{1}{4}$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{gdy } 1 \leqslant x \leqslant 10 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & \text{gdy } x \geqslant 10 \end{cases}$$

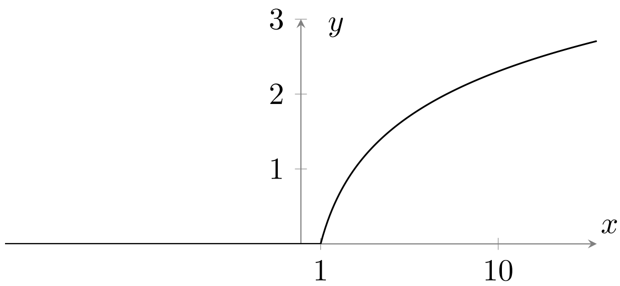
Zadanie 2. Strzelamy do tej samej tarczy, wygrywając Y = 5D, gdzie D jest odległością od brzegu tarczy. Znajdź dystrybuantę Y.

$E(Y) = P(Y = y) => P(Y \leqslant y) = P(Y \leqslant 5D) = P(D \leqslant \frac{4}{5})$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y < 0 \\ \frac{y^2}{100} - \frac{y}{5} & \text{gdy } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 1 & \text{gdy } y \geqslant 10 \end{cases}$$

$P(\Delta) = \frac{4\pi-(2-\frac{y}{5})^2}{\pi 4} = \frac{1}{4} - \frac{(2-\frac{4}{5})^2\pi}{\pi} = -\frac{y^2}{100} + \frac{y}{5}$

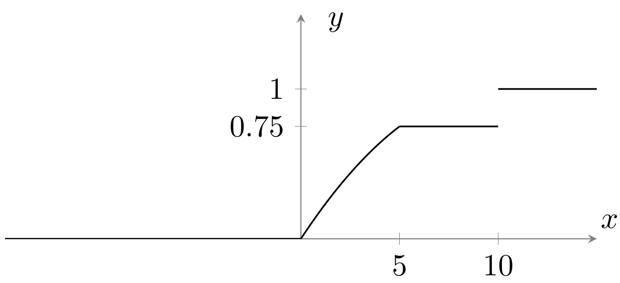


Definicja 7.1. Zmienna losowa $X : \Omega => R$ jest ciągła, gdy dystrybuanta $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ jest ciągła w każdym punkcie. Zmienna losowa X jest ciągła, gdy nie ma atomów, tzn.

$\forall x P(X = x) = 0$

Zadanie 3. Strzelamy do tej samej tarczy. Jeżeli nie trafimy, to wygrywamy 5D, gdzie D jest odległością od tarczy. Niech Z oznacza "win". Dystrybuanta Z:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } z < 0 \\ \frac{z}{5} - \frac{z^2}{100} & \text{gdy } 0 \leqslant z < 5 \\ \frac{3}{4} & \text{gdy } 5 \leqslant z < 10 \\ 1 & \text{gdy } z \geqslant 10 \end{cases}$$



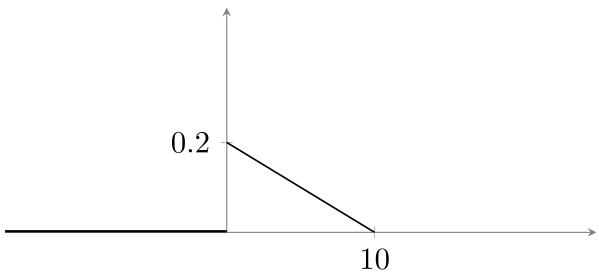
Dla D < 1 (z < 15) mamy $P(Z<z) = P(5D<z) = P(D<\frac{z}{5}) = \frac{z}{5} - \frac{z^2}{100}$

$P(z \leqslant 7) = P(z \leqslant 5)$

Gęstość zmiennej losowej X jest funkcją $f : R- > R$

$\forall_{x \in R} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$f_Y(y) = F'(y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y < 0 \\ (\frac{y}{5} - \frac{y^2}{100}) = \frac{1}{5} - \frac{y}{50} & \text{gdy } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{gdy } y \geqslant 10 \end{cases}$$



Własności gęstości:

1) $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in R$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

UWAGA

f(x) nie musi być ciągła.

Twierdzenie 7.1. Niech x będzie zmienną losową ciągłą o gęstości $f : R- > R$ i $g : R- > R$ będzie dowolnymi funkcjami (mierzalnymi).

Wtedy

$Eg(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt$

np.

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} t * f(t)dt$

DYSKRETNE	CIĄGŁE
$\sum_x P(X=x)=1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1$
$P(X\in B)=\sum_{x\in B} P(X=x)$	$P(X\in B)=\int_B f(t)dt$
$varX=E(X)^2-(E(X))^2$	$Eg(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt$
$Eg(x)=\sum_x g(x)P(X=x)$	

8 Wykład - 30.04.2019

8.1 Dystrybuanta zm.losowej ciągłej dwuwymiarowej

Definicja 8.1. Dystrybuanta zm. losowej (X,Y). Nazywamy funkcje $F_{XY}: R^2 \to R$

$F_{XY}=P(X\leqslant x, Y\leqslant y)$

$F_x=P(X\leqslant x)=\lim_{y\to\infty} F_{XY}(x,y)$ $F_y=P(Y\leqslant y)=\lim_{x\to\infty} F_{XY}(x,y)$

8.2 Niezależność w zmiennych losowych ciągłych dwuwymiarowych

Definicja 8.2. Zmienne losowe X,Y są niezależne gdy dla $\forall_{X,Y} F_{XY}(x,y)=F(x)F(y)$

8.3 Dystrybuanta w zmiennych losowych ciągłych dwuwymiarowych

Definicja 8.3. Jeśli dystrybuanta F_{XY} zmiennej losowej jest ciągła to często istnieje funkcja $f_{X,Y}: R^2 \to R_+ \cup 0$ Taka, że dla

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)dtds$$

Wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)dtds=1$$

8.4 Gęstość w zmiennych losowych ciągłych dwuwymiarowych

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s\partial t}$$

Zadanie 1. Gęstość zmiennej losowej (X,Y) jest dana wzorem:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx^2 & x\in[0,1]; y\in[-1,1] \\ 0 & wpp \end{cases}$$

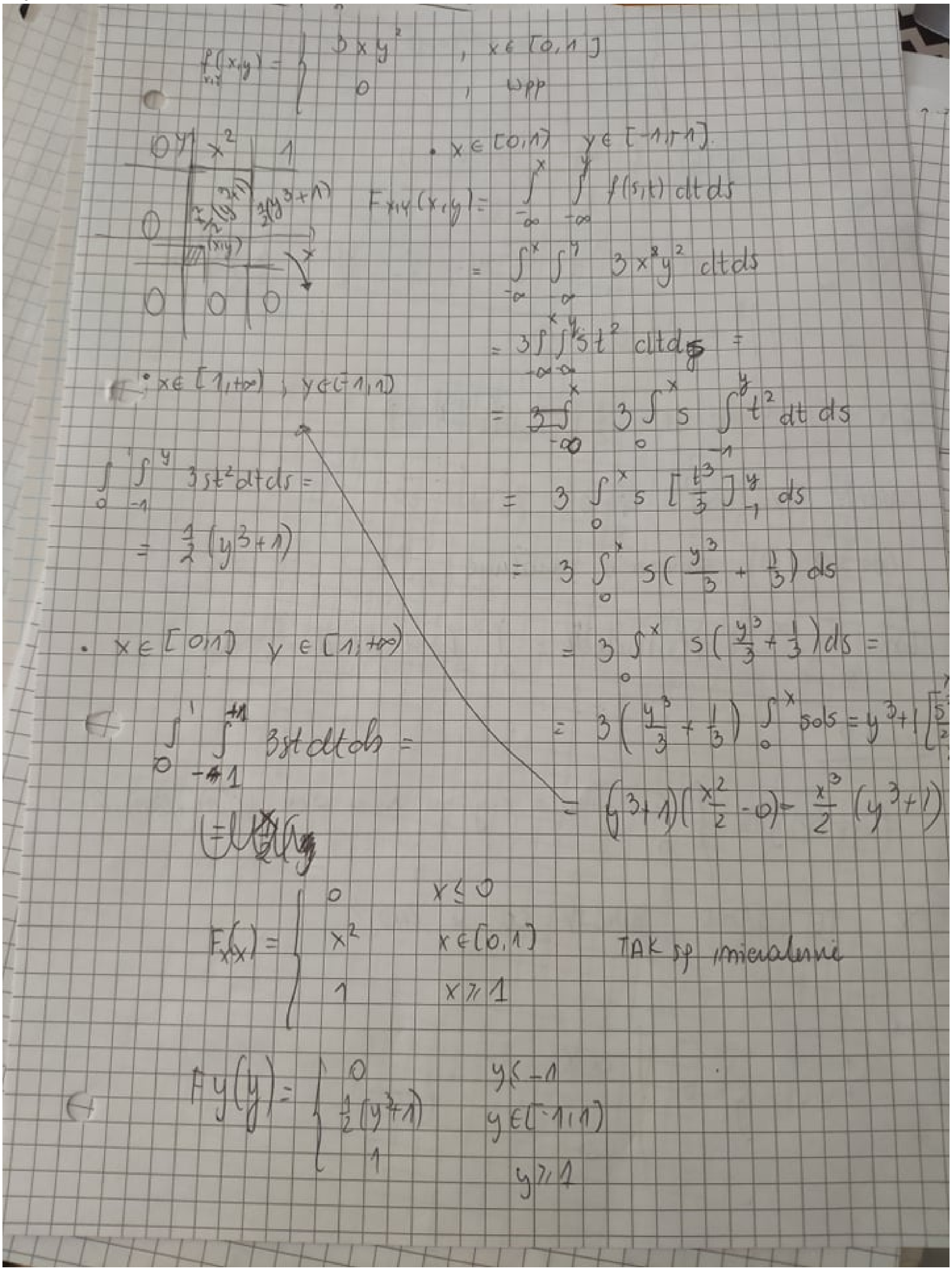
1) Znajdź c i $F_{X,Y}$

2) Znajdź rozkłady brzegowe

3) Znajdź EY, VarY, Cov(X,Y)

Ad. 1)

$1 = \int_0^1 \int_{-1}^1 cst^2 dtds => c = 3$



$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3xy^2 & , x \in [0,1] \\ 0 & , wpp \end{cases}$

$\bullet\ x \in [0,1) \quad y \in [-1,1)$

$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\,ds$

$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} 3x^2y^2\,dt\,ds$

$= 3 \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} st^2\,dt\,ds =$

$= 3 \int_0^x s \int_{-1}^{y} t^2\,dt\,ds$

$= 3 \int_0^x s \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{y} ds$

$= 3 \int_0^x s\left(\frac{y^3}{3} + \frac{1}{3}\right) ds$

$= 3 \int_0^x s\left(\frac{y^3}{3} + \frac{1}{3}\right) ds =$

$= 3\left(\frac{y^3}{3} + \frac{1}{3}\right) \int_0^x s\,ds = y^3+1 \left[\frac{s^2}{2}\right]$

$= (y^3+1)\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) = \frac{x^2}{2}(y^3+1)$

$\bullet\ x \in [1,+\infty) \quad y \in [-1,1)$

$\int_0^1 \int_{-1}^{y} 3st^2\,dt\,ds =$

$= \frac{1}{2}(y^3+1)$

$\bullet\ x \in [0,1) \quad y \in [1,+\infty)$

$\int_0^1 \int_{-1}^{1} 3st\,dt\,ds =$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \in [0,1) \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

TAK sę mieudnie

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{1}{2}(y^3+1) & y \in [-1,1) \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$

9 Wykład - 7.05.2019

9.1 Zmienne losowe ciągłe i dyskretne

$F_X(x) = P(X \leqslant x)$

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F(b) - F(a)$

$P(X \leqslant b, c < Y \leqslant c) = P(X \leqslant b, Y \leqslant d) - P(X \leqslant b, Y \leqslant c) - P(X \leqslant a, Y \leqslant d) + P(X \leqslant a, Y \leqslant c) = F_{X,Y}(b,a) - F(b,c) - F(a,b) + F(a,c)$

Gdy zmienna losowa (X,Y) jest ciągła:

$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds$

Zadanie 1.

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x, y \geqslant 1 \\ x^5 & \text{gdy } x \in [0,1], y \geqslant x \\ \frac{5}{3}x^3y^2 - \frac{2}{3}y^5 & \text{gdy } 0 \leqslant y < x < 1 \\ \frac{5}{3}y^2 - \frac{2}{3}y^5 & \text{gdy } 0 \leqslant y \leqslant 1, x \geqslant 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

i) znajdź $F_x i F_y$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \geqslant 1 \\ x^5 & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{gdy } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$=¿\frac{dF}{dx}$

$$\begin{cases} 5x^4 & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y \leqslant 0 \\ \frac{5}{3}y^2 - \frac{2}{3}y^5 & \text{gdy } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & \text{gdy } y \geqslant 1 \end{cases}$$

$=¿_{dy}^{dF}$

$$\begin{cases} \frac{10}{3}y - \frac{10}{3}y^4 & \text{gdy } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

ii) znajdź gęstość $x \in [0,1]$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt = \int_0^x 10x^2tdt = 10x^2 \int_0^x tdt = 10x^2(\frac{x^2}{2} - 0) = 5x^4$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)ds = \int_y^1 10s^2yds = \frac{10}{3}y - \frac{10}{3}y^4$

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2F}{dxdy}(x,y)$

$$\frac{dF}{dx} =^{(x,y)} \begin{cases} 5x^4 \\ 5x^2y^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2F}{dy} =>^{(x,y)} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 10yx^2 & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

iii) znajdź $P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2), P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant \frac{2}{3})$

$P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2) = P(x \leqslant 2) - P(x < \frac{1}{2}) = P(x \leqslant 2) - P(x \leqslant \frac{1}{2}) = F_X(2) - F_X(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}$

$P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2) = \int_{\frac{1}{2}}^2 f_X(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f_X(x)dx + \int_1^2 f_X(x)dx = \frac{31}{32}$

$P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant \frac{2}{3}) = F(2,\frac{2}{3}) - F(2,\frac{1}{3}) - F(\frac{1}{2},\frac{2}{3}) + F(\frac{1}{2},\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}(\frac{2}{3})^2 - \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^5 - \frac{5}{3}(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^5 - (\frac{1}{2})^5 + \frac{5}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{3})^2 - \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^5 = \frac{10723}{23328} = 0,46$

Nierówność Markowa

$P(|Y| \geqslant a) \leqslant \frac{E|Y|}{a}$

$\forall a(a > 0)$

Nierówność Czebyszewa

$P(|X - EX| \geqslant b) \leqslant \frac{VarX}{b^2}$

$P(|X - EX| \geqslant b) = P((X - EX^2) \geqslant b^2) \leqslant^{Markow} \frac{E(X-EX)^2}{b^2} = \frac{VarX}{b^2}$

Najczęściej używane rozkłady zmiennej losowej:

I) Rozkład dwumianowy

Zmienna losowa X ma rozkład B(n,p)

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, dlak = 0...n$

EX = np

VarX = np(1-p)

FAKT

$E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$

FAKT

Jeśli zmienne losowa X...X_n są niezależne:

$Var(X_1 + ... + X_n) = VarX_1 + ... + VarX_n$

$EX_i = 1 * P(X_i = 1) + 0 * P(X_i = 0) = 1$

$E(X_i)^2 = EX_i = 1 = p$

$VarX_i = p - p^2 = p(1-p)$

II) Zmienna losowa o rozkładzie Poissona

Gdy $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, dla k = 0 ... n

$EX = \lambda$

$VarX = \lambda$

III) Rozkład wykładniczy

X jest ciągła, rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & wpp \end{cases}$

$EX = \frac{1}{\lambda}$

$VarX = \frac{1}{\lambda^2}$

Zadanie 2. Maszynistka popełnia średnio 0,3 błędy na stronę. Znajdź prawdopodobieństwo, że na stronie 127 będą co najwyżej 2 błędy. Oszacuj te P używając nierówności Markowa i Czebyszewa.

$p = 0,3 = \frac{3}{10} => \lambda = 3$

n = 10

k = 2

$P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$P(X=2) = \frac{0,3^2}{2!} e^{-2}$

$P(X=1) = \frac{0,3}{1!} e^{-1}$

$P(X=0)=\frac{0,3}{0!}e^0$

$P(X\leqslant 2)=\frac{(0*3)^0}{0!}e^{-0,3}+\frac{(0*3)'}{1!}e^{-0,3}+\frac{(0*3)^2}{2!}e^{-0,3}=0,994$

$P(X\geqslant 2)=1-P(X>2)=1-P(X\geqslant 3)=1-0,1=0,9$

$M: P(X\geqslant 3)=P(|X|\geqslant 3)=\frac{E|X|}{3}=\frac{EX}{3}=\frac{0,3}{3}=0,1$

$C: P(X-EX\geqslant 3-EX)=P(X-EX\geqslant 2,7)\leqslant P(|X-EX|\geqslant 2,7)\leqslant \frac{VarX}{(2,7)^2}=\frac{0,3}{(2,7)^2}=0,041$

$P(X\leqslant 2)=1-P(X\geqslant 3)=1-0,0041=0,959$

Zadanie 3. Czas oczekiwania T na autobus mierzony w minutach ma gęstość

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{\frac{-t}{10}} & t\geqslant 0\\ 0 & wpp\end{cases}$$

$e^{-x}=exp(-x)$

i) znajdź $P(5\leqslant T\leqslant 20)$

ii) oszacuj $P(|T|\geqslant 3ET)$

Rozkład wykładniczy z $\lambda=\frac{1}{10}$

$P(5\leqslant T\leqslant 20)=\int_5^{20}\frac{1}{10}e^{\frac{-t}{10}}dt=P(5<T\leqslant 20)=E_T(20)-E_T(5)=(1-e^{-\frac{20}{10}})-(1-e^{-\frac{5}{20}})=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}=0,4712$

ET $=10$

$P(|T|\geqslant 30)\leqslant^M \frac{ET}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

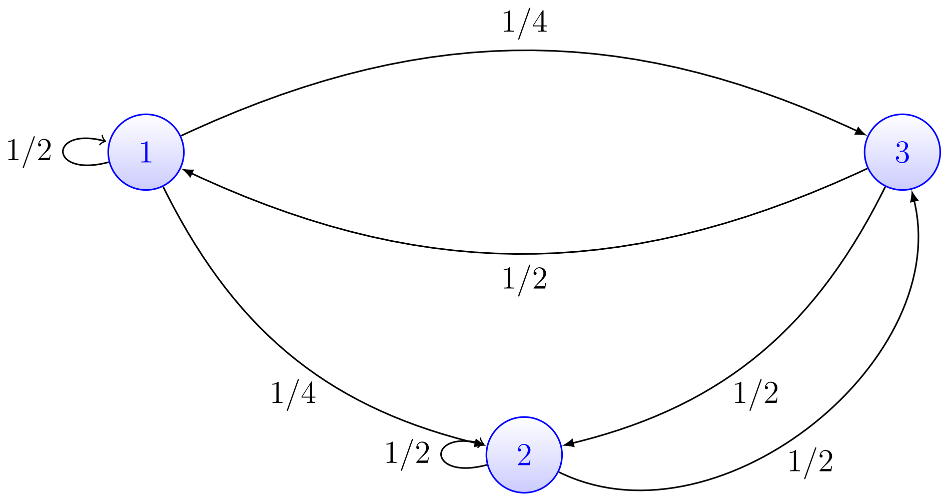
$P(T\geqslant 30)=^C P(T-ET\geqslant 30-ET)=P(T-ET\geqslant 20)\leqslant P(T-ET)\leqslant\frac{VarT}{(20)^2}=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}$

$P(T\geqslant 30)=1-P(T<30)=1-P(T\leqslant 30)=1-E_T(30)=1-e^{-\frac{30}{10}}=e^{-3}=0,05$

10 Wykład - 14.05.2019

10.1 Łańcuchy Markowa

Definicja 10.1. Łańcuch Markowa nazywamy ciąg zmiennych losowych $x_0,x_1...$ Takie, że dla dowolnego $i_0,i_1..$



$p_{12} = P(X = 2|X_o = 1) = \frac{1}{4}$

$\Pi = [p, j]$ - macierz przejścia.

$p_{ij}^t = P(X_t = j|X_0 = i)$

$p_{13}^{(2)} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \frac{1}{4} * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \frac{1}{4}$

$$\Pi^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

WAŻNA WŁASNOŚĆ Π^t

$\forall_{i \in S} \sum_{j=1}^{S} p_{ij}^{(t)} = 1$

$\bar{\rho}_i^0 = [\rho_1^0, \rho_2^0 \rho_3^0]$

$\rho^0 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]$

$\bar{\rho}^t = \bar{\rho}^0 * \Pi^t$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

10.2 Rozkład stacjonarny

Definicja 10.2. Rozkładem stacjonarnym Łańcuchem Markowa o macierzy przejścia Π, nazywamy $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..)$ Taka, że :

1) $\pi = \pi * \Pi$

2) $\pi_i \geqslant 0$

3) $\sum_{i=1}^{s} \pi = 1$

$$\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{2} + 0 = \pi_1 => \pi_1 = \pi_2 \\ \frac{\pi_1}{4} + 0 + \frac{\pi_3}{4} = \pi_2 => \pi_3 = \frac{3\pi_1}{2} \\ \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2} = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wychodzi nam: $[\pi_1, \pi_2, \pi_3] = \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$

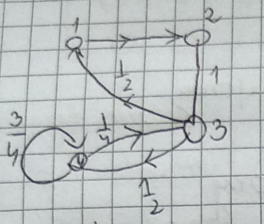
Twierdzenie 10.1. UWAGA!! Każdy Łańcuch Markowa (o skończonej liczbie stanów) ma przynajmniej jeden rozkład stacjonarny. Dodatkowo jeżeli łańcuch jest ergodyczny (nieprzewiedlny, nieokresowy) to na pewno ma jeden rozkład stacjonarny.

11 Wykład - 21.05.2019

NRP - 12 ⟹ ŁAŃCUCHY MARKOWA c.d. 21|05

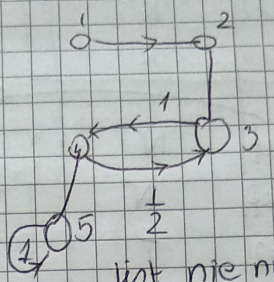
p. Brzdęgo

Przykład 1



jest nieprzywiedlny

Przykład 2



jest nie nieprzywiedlny

DEF Nieprzywiedlność

Ł.M nazywamy nieprzywiedlnym gdy dla dow. $i,j \in S$ istnieje $t \geq 1$ dla którego $p_{ij}^t > 0$.

Na przykładzie 1. Ł.M jest nieprzywiedlnym:

i,j	t
1,2	1
2,1	3
...	
1,1	3

Na przykładzie 2 Ł.M jest nie nieprzywiedlny:

np. $p_{21}^t = 0 \quad \forall t \geq 1$.

DEF OKRESOWOŚĆ

Okresem stanu $j \in S$ Ł.M nazywamy liczbę

$$d(j) = NWD\{t \geq 1 : p_{jj}^t > 0\}$$

Jeżeli $d(j) > 1$ nazywamy (j ⟹ stan okresowy) w przeciwnym przypadku j jest ~~jest~~ stanem nieokresowym

UWAGA Jeśli $p_{jj}^t = 0 \quad \forall_{t \geq 1}$, to mówimy, że j nie ma okresu. Mimo to mówimy st. nieokresowym.

	stan	czas powrotu	okres	czy stan jest okresowy	
PRZYKŁAD 1	1	3,5,6,7	NWD = 1	N	Ł.M nieokresowy
	2	3,5,6,7	NWD = 1	N	
	3	2,3,4 ...	NWD = 1	N	
	4	1,2,3 ...	NWD = 1	N	
PRZYKŁAD 2	1	brak	nie def	N	Ł.M okresowy
	2	brak	nie def	N	
	3	2,4,6,8,...	NWD = 2	T	
	4	2,4,6,8..	NWD = 2	T	
	5	1,2,3 ...	NWD = 1	N	

→ nie definiujemy

<u>DEF</u> Ł.M nazywamy <u>nieokresowym</u>, jeśli każdy jego stan jest nieokresowym.

<u>DEF</u> Ł.M nazywamy <u>ergodycznym</u> gdy jest nieprzywiedlnym i nieokresowym.

FAKT W Ł.M nieprzywiedlnym, każdy stan ma taki sam okres.

<u>TW 1</u> (TW. Ergodyczne)

Każdy Ł.M ergodyczny ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny $\overline{\pi} = (\pi_1 \dots \pi_{|S|})$

Ponadto zachodzi dla $i,j \in S$ zachodzi:

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}^t = \pi_j$$

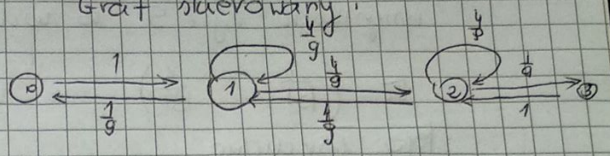
<u>Równoważnie</u> Niezależnie od rozkł. początkowego $\overline{\rho}^0$

$$\lim_{t \to \infty} \overline{\rho}^t = \overline{\pi}$$

PRZYKŁAD 3 z ćw 10 (zad. 3)

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Graf skierowany:



→ Co dzieje się po 1000 krokow?

1) sprawdzamy ergodyczność

a) spr. nieprzywiedlność („metoda widać")

OK (TAK)

b) spr. okresowość

Jest nieokresowy

$d(1) = NWD = 1 \iff$ korzystamy z faktu 1 $\Rightarrow$ wszystkie okresy są równe 1

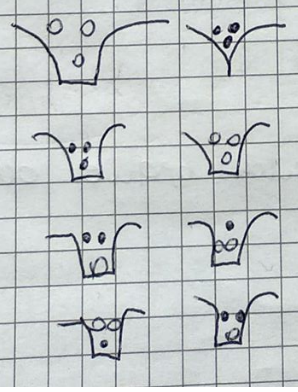
a i b $\Rightarrow$ Ł.M jest ergodyczny

Rozkład stacjonarny $\overline{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20}\right)$

Z tw. ergodycznego

$$\lim_{t \to \infty} \overline{p}^{\,t} = \left(\underset{0}{\frac{1}{20}}, \underset{1}{\frac{9}{20}}, \underset{2}{\frac{9}{20}}, \underset{3}{\frac{1}{20}}\right)$$

Po wielu krokach (np. 1000) otrzymamy



praw $\approx \frac{1}{20}$

$\approx \frac{1}{20}$

$\approx \frac{9}{20}$

$\approx \frac{9}{20}$

Tw 2 Jeżeli dla Ł.M zachodzi $p_{ij} = p_{ji}$ dla wszystkich $i,j \in S$, to rozkład jednostajny

$\pi = \left(\frac{1}{|S|}, \dots \frac{1}{|S|}\right)$ jest rozkład stacjonarnym tego łańcucha.

Przykład 4 Talia, losujemy 2 razy kartę i zamieniamy miejscami. Jakie jest $P \approx$?, że po 1mln porządek kart będzie przeciwny do wyjściowego

(24)

| |A| | | | |B| stan i

np

1) | |A| | | | |B| stan j

>0

2) | |A| | | | |B|

>0

$$p_{ij} = \underset{A}{\frac{1}{24}} \cdot \underset{B}{\frac{1}{24}} + \underset{B}{\frac{1}{24}} \cdot \underset{A}{\frac{1}{24}} = p_{ji} \xRightarrow[\text{tw 2}]{\text{czyli}} \forall_{i,j \in S} \; p_{ij} = p_{ji}$$

lub

$$p_{ij} = 0 = p_{ji}$$

Rozkład jed $\pi = \left(\frac{1}{24!}, \dots, \frac{1}{24!}\right)$ jest rozł. stacjonarnym

- Ł jest nieokresowy bo pętle $(d(j) = 1)$
- Ł jest nieprzewiedlny : sort. bąbelkowe

$\Big\}$ Ł.M ergodyczny

z tw. erg.

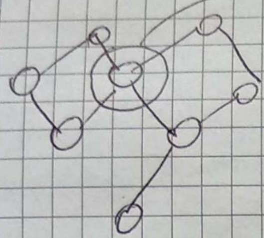
$$\lim_{t \to \infty} P^t = \left(\frac{1}{24!} \dots \frac{1}{24!}\right)$$

Po 1mln kroków z pr $\approx \frac{1}{24!}$ porządek będzie odwrotny.

$G = (V, E)$ Błądzenie na grafie

Błądzenie klasyczne | spacer losowy na $G=(V,E)$
(G bez wierzchołków izolowanych)

st. wierzchołka 4

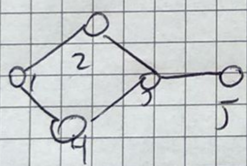


Jest to Ł.M. o zbiorze stanów $V(G)$ i macierzy przejścia określ. $p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i,j \notin E(G) \\ \frac{1}{\deg(i)}, & \text{gdy } ij \in E(G) \end{cases}$ ← nie jest połączone krawędzią

<u>TW. 3</u> Rozważamy błądz. klasycz. na gr. G (bez wierz. izolow.)
Wtedy rozkład π zdef wg. wzoru:

$$\pi_j = \frac{\deg(j)}{2E(G)} \quad \text{dla}$$

jest rozkładem stacjonarnym tego Ł.M.



$$\pi = \left(\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

<u>TW. 4</u> G – bez wierz. izolowanym

a) błądz. na G jest nie Ł.M wtedy i tylko wtedy gdy G jest gr. spójnym.

b) błądz na G jest nieokresowym Ł.M $\Leftrightarrow$ G nie jest dwudzielny.

12 Wykład - 28.05.2019

12.1 Prawo Wielkich Liczb

Twierdzenie 12.1. Niech $X_1, X_2...$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkladzie, takich, że $EX_1 = \mu$ $VarX_1 = \sigma^2 < \infty$ Ponadto, niech $S_n = X_1 + ... + X_n$ Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon) = 0$$

Dowód

$ES_n = E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n EX_i = n\mu$

$VarS_n = Var(\sum_{i=1}^n X_i =$ (z niezaleznożci) $\sum_{i=1}^n VarX_1 = n\sigma^2$

$P(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon) = P(|S_n - n\mu| > n\epsilon) \leqslant P(|S_n - ES_n| \geqslant n\epsilon) \leqslant$ (z Czebyszewa) $\frac{VarSn}{\epsilon^2 n^2} = \frac{n\sigma^2}{\epsilon^2 n^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

CND.

Definicja 12.1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$, co zapisujemy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ jeśli gęstość X dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})} \text{ dla } x \in (-\infty, \infty)$$

Jeśli $X \sim N(0, 1)$ to mówimy, że X ma standaryzowany rozkład normalny.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ to } EX = \mu \; VarX = \sigma^2$$

Wartość dystrybuanty Φ rozkład $N(0, 1)$ można znaleść w tablicach.

Definicja 12.2. Jeśli X jest zmienną losową to $\widetilde{X} = \frac{X-EX}{\sqrt{VarX}}$ nazywamy standaryzacją zmiennej losowej X. $E\widetilde{X} = 0$, $Var\widetilde{X} = 0$.

FAKT Jeśli X ma rozkład normalny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $\widetilde{X} \sim N(0, 1)$

12.2 Cetralne Twierdzenie Graniczne - CTG

Definicja 12.3. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samych rozkładzie takich,że $EX_1 = \mu$, $VarX_1 = \sigma^2$, $E|X_1|^3 < \infty$.

Ponadto, niech $S_n = X_1 + ... + X_n$, i niech $x \in (-\infty, \infty)$ Wtedy otrzymujemy wzór:

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma * n} < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

UWAGA Jeśli S_n jest zmienną losową całowito liczbową to stosujemy poprawkę $\frac{1}{2}$

Zadanie 1. Rzucamy 100 razy monetą. Niech S_n będzie liczbą orłów.:

1) Użyj CTG do obliczenia $P(S_n = 50)$

$P(S_n = 50) = P(49,5 < S_n \leqslant 50,5)$ $S_n = X_1 + X_2 + X_3 ... + x_n$

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy reszka w i-tym rzucie} \\ 1 & \text{gdy orzeł w i-tym rzucie} \end{cases}$$

$P(X_1 = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$

$EX_i = 1 * P(X_i = 1) + 0 * P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$

$EX_i{}^2 = 1^2 * P(X_i = 1) + 0 = \frac{1}{2}$

$VarX = E(X_i{}^2) - (EX_i)^2 = \frac{1}{4}$

$EX_i = \mu = \frac{1}{2}$

$VarX_i = \sigma^2 = \frac{1}{4}$

$P(49.5 < S_n \leqslant 50.5) = P(49.5 - 50 < S_n - 50 \leqslant 50.5 - 50) = P(\frac{-0.5}{5} < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{0.5}{5}) = P(-0.1 < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant 0.1) zCTG \Phi(0.1) - \Phi(-0.1) = 0.54 - 0.46 = 0.08$

2) Normalnie obliczając $P(S_n = 50)$

$P(S_n - 50) = \binom{100}{50} * (\frac{1}{2})^5 0(1 - \frac{1}{2})^5 0 = 0.0795$

3) Oszacuj $(S_n \geqslant 60)$ Używając nierówności Markowa i Czebyszewa, CTG

NIERÓWNOŚĆ MARKOWA

$P(S_n \geqslant 60) = P(|S_n| \geqslant 60) \leqslant \frac{E|S_n|}{60} = \frac{ES_n}{60} = \frac{50}{60} = 0.833$

NIERÓWNOŚĆ CZEBYSZEWA

$P(S_n \leqslant 60) = P(S_n - EX \leqslant 60) = P(S_{100} - 50 \leqslant 60 - 50) = P(S_{100} - 50 \geqslant 10) \leqslant P(|S_{100} - 50| \geqslant 10) \leqslant (N.C) \frac{Var_{S_n}}{10^2} = 0.25$

CTG

$1 - \Phi(1.9) = 1 - 0.971 = 0.029$