STATYSTYKA - WYKŁAD 1

St. opisowa

1 Zadaniem statystyki opisowej jest prezentacja rozkładu cechy X w próbce (rozkładu empirycznego) przy pomocy tabeli lub wykresu.

Rozkład empiryczny - uzyskany na podstawie badania statystycznego opis przyjmowanych przez cechę stat. w próbce przy podobie częst. ich występowania

2 Metody opisu rozkładu empirycznego:

1) tabelaryczny
2) graficzny
3) St. opisowej
 - → klasyczne
 - → pozycyjne

3 Charakterystyki rozrzutu rozkł. empirycznego

1) odchylenie standardowe - jak szeroko wartości jakiejś wielkości są rozrzucone wokół jej średniej.

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}$$

2) współczynnik zmienności

$$V = \frac{\sigma}{\mu}$$

odchylenie st. w populacji

wartość oczekiwana

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$$

odchylenie st. z próby

średnia aryt. z próby

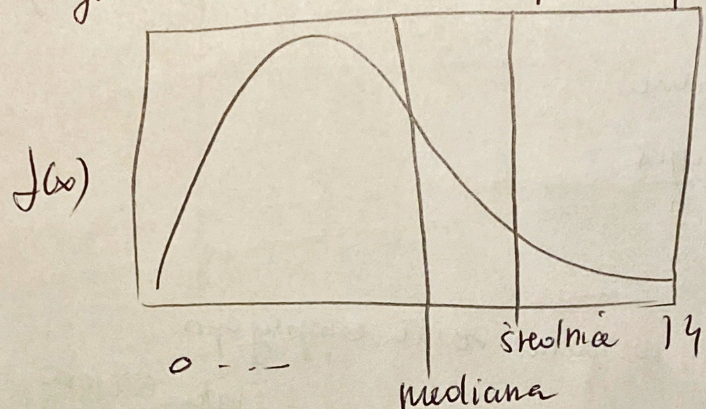
"Współczynnik ten jest estymatorem swojego odpowiednika w populacji) ćw 4

4 Współczynnik asymetrii (skośnej)

$$A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

→ własności:

- równy zero oznacza symetrię rozkładu zmiennej
- wartość dodatnia oznacza prawostronną asymetrię. Prawy ogon jest dłuższy, a masa rozkładu prawdopodobieństwa jest skoncentrowana po lewej stronie



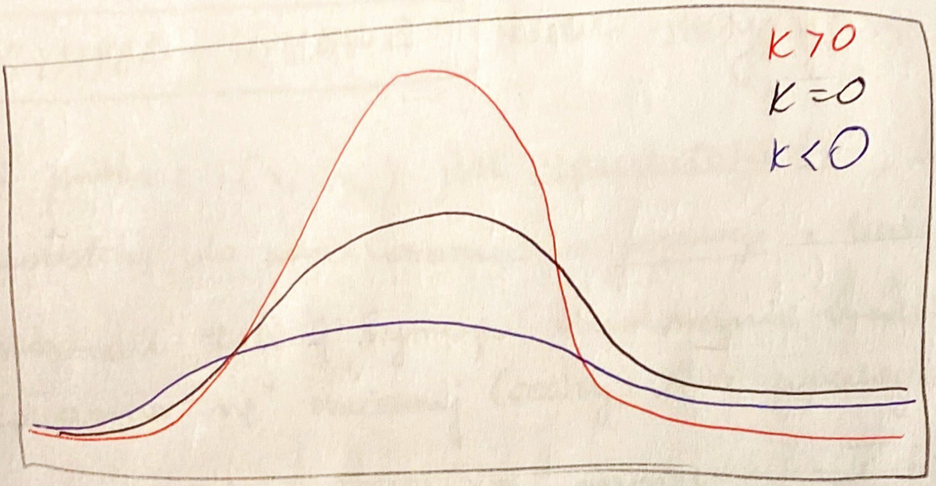
- wartość ujemna podobnie definiujemy ale odwrotnie.

5 Miara koncentracji układu

→ Kurtoza

$$K = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3$$

jest to miara skupienia wartości zmiennej wokół średniej



Kurtoza

(7) Szereg rozdzielczy – sposobem reprezentacji rozkładu empirycznego.

<u>Przykład</u> W badaniu literówek na str. Wiki zaobserwowano następujące wyniki (liczby reprezentują ilość znalezionych literówek na stronie)

wr. cechy	liczebność	częstość
0	5	0,25
1	8	0,4
2	5	0,25
~~3~~	~~X~~	
4	1	0,05
5	1	0,05

STATYSTYKA – WYKŁAD 2 | Model statystyczny

① Jeśli próbka $x = (x_1 \dots x_n)$ jest reprezentatywna, to stanowi ona podstawę do wnioskowania o populacji z której pochodzi. Wnioskowanie takie wymaga zbudowania modelu „zachowania się” zmiennej (cechy) X w populacji.

② Budowa modelu polega na przyjęciu założenia o rozkładzie (teoretycznym) zm. X w populacji oraz traktowaniu obserwacji jako wartości tej zmiennej.

③ Przykład (wykład 2) W celu określenia norm bezawaryjności pracy urządzeń po wykonaniu kapitalnego remontu, wybrano 50 urządzeń i obserwowano ich czas bezawaryjności. Wyniki: (629, 325 ... , 215 ...)

Budując model statystyczny tego eksperymentu zakładamy, że (w populacji) czas bezawaryjności pracy urządzenia (cecha X) ma rozkład wykł. z parametrem λ.

④ rozkład dwumianowy (Bin ~(n, p))

dbinom Ⓡ

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} ; \quad k=0, \ldots n$$

barplot(dbinom (x = 0:10, size = 10, prob = 1/3),

names.arg = 0:10,

xlab = "k",

ylab = "P(X=k)",

main = "Funkcja prawdopodobieństwa")

⑤ rozkład Poissona $\Pi(\lambda)$; $\lambda > 0$

dpois Ⓡ

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad / \; k = 0, \ldots n$$

⑥ rozkład jednostajny $U(a,b)$, $a<b$

dunif Ⓡ

$X \sim U(1,3)$

curve (dunif(x, min = 1, max = 3),

0, 4,

ylab

:)

⑦ Rozkład normalny $N = (\mu, \sigma)$ $\mu \in R$

$\sigma > 0$

Ⓡ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

dnorm

⑧ Rozkład Rayleigha

$$f_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda} x \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right) I_{(0,\infty)}(x)$$

PAKIET VGAM

lambda <- 2

-- (VGAM:: drayleigh

, sqrt (lamb/2))

⑨ Dalsza tabelka rozkładów i ich parametrów (temat 5) ćw.

STATYSTYKA - WYKŁAD 3

Estymacja punktowa

① Niech $X = (X_1, X_2 \dots X_n)'$ będzie próbą z populacji o rozkładzie P_θ, gdzie $\theta \in \Theta$ jest parametrem.

② Estymatorem parametru θ nazywamy statystykę $T(X)$ o wartości w zbiorze Θ, której wartości dla konkretnej realizacji x próby X, przyjmujemy za ocenę nieznanej wartości parametru θ (oznaczamy $\hat{\theta}(X)$ lub ~~$\hat{\theta}$~~)

- → metoda momentów
- → -"- największej wiarygodności ✓
- → -"- najmniejszych kwadratów

---

ciała z momenty eksperymentalne

liczne $\in$ ~~to~~ duże.

$$m_k = \frac{1}{n} \sum x_i^k$$

$\hat{m}_1 = \bar{x}$ eksperymentalne.

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k$$

$M_2 = S^2$

$S^2 = m_2 - m_1^2$

$m_2 = S^2 + \bar{x}^2$

$M_1 = M_1$

$$m_k = \begin{cases} \sum x_i^k p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k f(x)\,dx \end{cases}$$

$m_1 = EX$

$$M_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum (x_i - EX)^k \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k f(x)\,dx \end{cases}$$

$M_2 = \sigma^2 = VarX$

$M_2 = VarX = \sigma^2 = EX^2 - (EX)^2 =$

$= \sigma = m_2 - m_1^2$ (11)

- model wykładniczy

$\frac{1}{mean(A)} = \lambda$ parametr

szacowanie wartości oczekiwanej w modelu normalnym

mean(Kamulec Hrynik)

Wyjaśnienie poj. ESTYMATOR.

Estymator = statystyka (czyli funkcja określona na próbie) służąca do przybliżenia parametru(ów) populacji

Jak mierzyć „dobroć" estymatora?

- nieobciążony ($E\hat{\Theta} - \Theta = 0$) – „tzn. estymator trafia do celu"
- asymptotycznie nieobciążony ($\lim_{n\to\infty} (E\hat{\Theta} - \Theta) = 0$)
- efektywny (= o najmniejszej wariancji)

Metoda największej wiarygodności

Niech $X = (X_1, \ldots X_n)'$ będzie próbką populacji P_Θ, gdzie $\Theta \in \Theta \subset R^d$.

↳ ponadto, niech rozkłady P_Θ opisane były za pomocą funkcji prawdopodobieństwa (gęstości) p_Θ.

Funkcję L określoną wzorem $L(\Theta, x) = p_\Theta(x)$ nazywamy f. wiarygodności.

Estymatorem naj. wiarygodności (ENW) nazywamy statystykę $\hat{\Theta}(X)$, która $\hat{\Theta}(x)$ spełnia warunek:

$$\forall_{x \in X} : L(\hat{\Theta}(x), x) = \sup_{\Theta \in \Theta} L(\Theta, x)$$

Przykład

① korzystając z metody największej wiarygodności!

$\cdot f$ - prawd. $L(\theta, x) = p_\theta(x)$
↑ f. wiarygodności

Est. NW $\forall_{x \in X} \; L(\hat{\theta}(x), x) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta, x)$

a) Awarie (wykład)

X - czas pracy

$X \sim Ex(\lambda)$; $\lambda > 0$

$f_\lambda(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$; $x \geq 0$

$\ln e = 1$
$\ln e^2 = 1 \cdot 2 = 2$

L ⇒ f. wiarygodności

$$\boxed{L(\lambda, x)} = \prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda \exp(-\lambda x)) =$$

$$= (\lambda \exp(-\lambda x))^n = (\lambda^n \exp(-\lambda x n)) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k)$$

$$\boxed{\underbrace{\ln(L(\lambda, x))}_{L(\lambda)}} = \ln\left(\lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) =$$

$$= \ln \lambda^n + \ln\left(\exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) =$$

$$= n \ln \lambda + -\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\boxed{\frac{d \ln(L(\lambda, x))}{d\lambda}} = \frac{\partial(\ln(L(\lambda, x))}{\partial \lambda} = \frac{\partial(n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k)}{\partial \lambda} =$$

$$\cancel{= \frac{n \sum_{k=1}^{n} x_k (\ln \lambda - \lambda)}{\partial \lambda} = n \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)} =$$

$$= \frac{\partial(n \ln \lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial(\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\right) =$$

$$= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\cancel{\partial(\ln(}$

$$\frac{\partial(L(\lambda)}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \frac{1}{\overline{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2}{d\lambda^2}(L(\lambda)) = -\frac{n}{\lambda^2}; \quad -\frac{n}{\lambda^2}\Big|_{\frac{1}{\overline{x}}} = -n\overline{x}^2 < 0 \\ \text{latem ENW par } \lambda \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}} \end{array}\right\}$$

? forma kwadratowa powinna być ujemnie określona $\nabla < 0$

dla dwóch parametrów

$x \sim$ dl. drogi hamowania

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$$\hat{\mu} = \overline{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 =$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

$$L = L(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0 \ \text{max}$$

Estymator nazywamy nieobciążonym $\Leftrightarrow$

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda$$

② Metoda momentów

Momenty eksperymentalne (empiryczne)	Momenty teoretyczne
zwykłe $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^k$	$\mu_k = \begin{cases} \sum x_i^k p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^k f(x)\,dx \end{cases}$
$m_1 = \overline{x}$	$\mu_1 = \mathbb{E}X$
centralne - oznaczamy je dużą literą	
$M_k = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k$	$M_k = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum (x_i - \mathbb{E}X)^k \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X) f(x)\,dx \end{cases}$
$M_2 = s^2$ / wariancja	$M_2 = \sigma^2 = \mathrm{Var}X$
ZWIĄZKI	
$s^2 = m_2 - m_1^2$	$M_2 = \mathrm{Var}X = \sigma^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$
$m_2 = s_2 + \overline{x}^2$	$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$
	$\Downarrow$
	$\mu_2 = \sigma^2 + \mu_1^2 = \sigma^2 + (\mathbb{E}X)^2$
m_i	$= m_i$

WYKŁADEK

Niech $\Theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_1 = m_1 \\ \mu_2 = m_2 \\ \mu_3 = m_3 \\ \vdots \\ \mu_d = m_d \end{cases}$$

Przykład.

$X \sim \mathbb{E}_x(\lambda) \quad \lambda > 0 \ ; \ d = 1$

$\mu_1 = m_1$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^k$

$\frac{1}{\lambda} = \overline{x}$

$\lambda = \frac{1}{\overline{x}}$

Model WYKŁADNICZY

$\Downarrow$

$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$

$f = \lambda \exp(-\lambda x)$

Przykład 2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma^2 > 0$ $d = 2$

$$\begin{cases} \mu_1 = m_1 \\ \mu_2 = m_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \end{cases}$$

$\operatorname{Var} X = E(X)^2 - (EX)^2$

$\Downarrow$

$E(X^2) = \operatorname{Var} X + (EX)^2$

$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ m. nov m.

$$\begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k^2 - \bar{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = x \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \end{cases}$$

Są to EMM dla μ, σ^2

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{x})^2$$

• EMM (est. met. momentów) dla λ

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

• ENIE

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{n\overline{X}}$$

• EMM, μ i σ^2 w modelu normalnym

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

klasa est. nieobciążonych

Najlepszy jest z nich jest ten który ma min <u>Var</u>.

$$\bullet\ \mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \Theta.$$

estymator nieobciążony (ENIE)

Parametry $\hat{\mu} = \overline{X}$ jest Enie (o najm. Var)

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Rozkłady estymatorów

↳ Chi - kwadrat

$$\chi^2(n) = X_1^2 + X_2^2 + X_{\dots} + X_n^2$$

- model wykładniczy

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{n\bar{X}}$$

$$2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2(2n)$$

- model normalny

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = S^2$$

TW. FISHERA

W modelu jednej próby prostej z rozkładu normalnego

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

i

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$$

ponadto estymatory $\bar{X}$ i S^2 są niezależnymi zmiennymi losowymi

Ⓡ D O

Metoda Monte Carlo „dwiatalność stat" mając jedną

Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ będzie próbą z populacji o rozkładzie P_θ, gdzie θ jest parametrem.

Ponadto niech

$$\hat{\theta} = T(\boldsymbol{X})$$

będzie estymatorem parametru θ.

Załóżmy, że dysponujemy k niezależnymi realizacjami próby $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ oraz że $\hat{\theta}_i = T(\boldsymbol{x}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

FAKT

Histogram wartości $\hat{\theta}_1 = T(\boldsymbol{x}_1), \hat{\theta}_2 = T(\boldsymbol{x}_2), \ldots, \hat{\theta}_k = T(\boldsymbol{x}_k)$ jest dla dużych k, dobrym przybliżeniem rozkładu $\hat{\theta}$.

Metoda bootstrapowa „dwiatalność stat" mając jedną próbę.

Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ będzie próbą z populacji o rozkładzie P_θ, gdzie θ jest parametrem.

Ponadto niech

$$\hat{\theta} = T(\boldsymbol{X})$$

$X - \{\frac{1}{n}, \ldots\}$

będzie estymatorem parametru θ oraz F oznacza dystrybuantę rozkładu P_θ.

Dystrybuantą empiryczną nazywamy statystykę:

zwrotny Pewny rozkład dyskretny

$$\hat{F}(x) = \frac{\#\{k: X_k \leq x\}}{n}.$$

TWIERDZENIE (Gliwenki-Cantelliego)

Niech $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ będzie próbą prostą z populacji o rozkładzie opisanym dystrybuantą F.

Wtedy

z prawd. „1"

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}(x) - F(x)| \xrightarrow{1} 0.$$

zbiegała (jednostajnie)

Próbą bootstrapową nazywamy próbę losową z rozkładu $\hat{F}$, ozn: $\boldsymbol{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)'$.

Uwaga: W celu otrzymania realizacji próby bootstrapowej dokonujemy n-krotnego losowania ze zwracaniem spośród wartości oryginalnej próby.

FAKT *(Zasada bootstrap)*

Rozkład statystyki $T(\boldsymbol{X}^*) - \hat{\theta}$, przy ustalonych wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest bliski rozkładowi $T(\boldsymbol{X}) - \theta$.

Załóżmy, że dysponujemy k realizacjami próby bootstrapowej $\boldsymbol{X}^*$: $\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^*, \ldots, \boldsymbol{x}_k^*$ oraz że $\hat{\theta}_i^* = T(\boldsymbol{x}_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

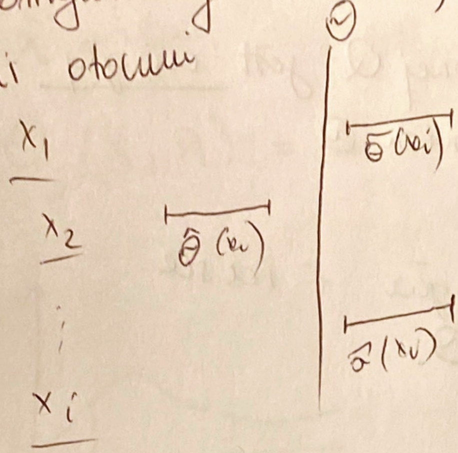
FAKT

Histogram wartości $\hat{\theta}_1^* - \hat{\theta}, \hat{\theta}_2^* - \hat{\theta}, \ldots, \hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}$ jest dla dużych k, dobrym przybliżeniem rozkładu $\hat{\theta} - \theta$.

STATYSTYKA - WYKŁAD 4 | Przedziały ufności

① Idea i def przedziału ufności

Jak coś „mierzymy" chcemy podać oszacowanie np. ile się pomyliliśmy i w którą stronę. Mamy podejście w jakimś otoczeniu



Przedział to otoczenie pewnego estymatora punktowego w postaci przedziału, który ma z dużym prawdopodobieństwem zawierać prawdziwą wartość tego parametru. Dokładniej musi pokrywać prawdziwą wartość parametru

Rzadko poniżej 5% = 0.05 UMÓWIONA WARTOŚĆ, ten parametr można zmienić

DEF Przedział (L, R) określony parą statystyk L i R takich, że $P_\Theta(L \leq R) = 1$ dla każdego $\Theta \in \Theta$, nazywamy przedziałem ufności dla parametru Θ, na poziomie ufności $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ dla każdego $\Theta \in \Theta$

$$P_\Theta(L < \Theta < R) \geq 1-\alpha$$

Typowe wartości poziomu ufności to: 0,9; 0,95; 0,99 (zazwyczaj podawane w %)

① Konstrukcja przedziału ufności

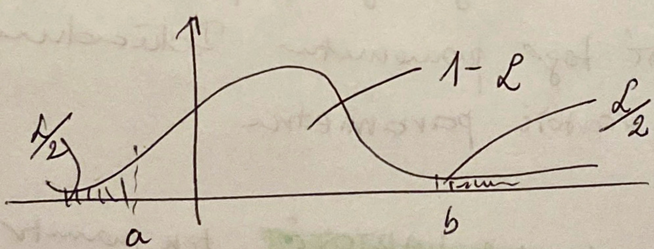
<u>Funkcją centralną</u> nazywamy funkcję $Q(X, \Theta)$ dla parametru Θ gdy

① rozkład prow. zm. losowej Q jest <u>ciągły</u> i <u>nie</u> zależy od parametru Θ

② funkcja $Q(X, \Theta)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna względem Θ.

I. Obieramy $Q(X, \Theta)$

II. Wyznaczamy stałe a i b



$P(Q \geq b) = \frac{\alpha}{2}$

$P(Q \leq a) = \frac{\alpha}{a}$

III. rozwiązujemy nierówność ze względu Θ:

$$a < Q(X, \Theta) < b$$

Przykład

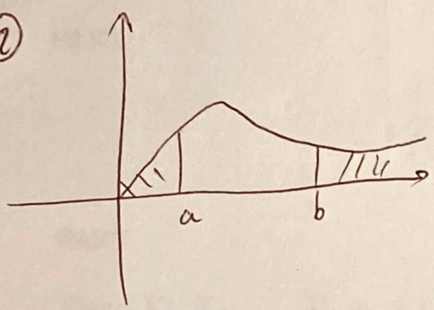
X - czas bezawaryjnej pracy

$X - Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$; wykładniczy.

① $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$ — EMM, ENW

$Q(X, \lambda) = \ln \lambda \overline{X} \sim \chi^2(2n)$

②



$\mathbb{P}(Q \leq a) = \frac{\alpha}{2}$

$F_Q(a) = \frac{\alpha}{2}$ kwantyle

$a = F_Q^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$a = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, 2n\right)$

$\mathbb{P}(Q \geq b) = \frac{\alpha}{2}$

$\mathbb{P}(Q < b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$F_Q(b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\cancel{F_Q(1}$ $b = F_Q^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

$b = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 2n\right)$

$a < \ln \lambda \overline{X} < b$

$\frac{a}{\ln \overline{X}} < \lambda < \frac{b}{\ln \overline{X}}$

Zatem $(1-\alpha) \cdot 100\%$ przedział ufności dla λ:

$$\left(\frac{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, 2n\right)}{\ln \overline{X}} ; \frac{\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 2n\right)}{\ln \overline{X}} \right)$$

DEFINICJA

Niech $X \sim N(0,1)$ oraz $Y \sim \chi^2(n)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi.

Mówimy, że zmienna losowa

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}}$$

ma rozkład z n stopniami swobody (ozn. $t(n)$).

f. gamma Eulera

FAKT

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \ x \in \mathbf{R}.$$

FAKT

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n > 1$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$.

Wtedy

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1).$$

Przykład (Auto-test)

X - dł. drogi hamowania

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 - parametry

Konstrukcja dla parametru μ:

1) $\hat{\mu} = \bar{x}$ ENW, EMM, ENMW

$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Q(X, \mu) = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

ale nasza konstrukcja musi zależeć tylko μ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q(X, \mu) = \frac{\bar{x} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim ?$$

estymator σ (sigmy) w poprzednim mone

Fakt $$\frac{\bar{x} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Dowód: Niech

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1) \\ Y &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \end{aligned}\right\} \text{niezależne zm. losowe}$$

Zatem

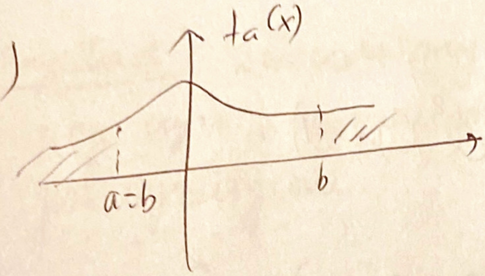
$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n-1}Y}} \sim t(n-1)$$

Mamy

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n-1}Y}} = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{S}\sqrt{n} \quad \square.$$

Przyjmujemy $Q(x,\mu) = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

2)



$P(Q \geq b) = \frac{\alpha}{2}$

$P(Q < b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$F_Q(b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$b = F_Q^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

$b = t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$

$a = -t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$

3) $-b < \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} < b$

$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} b < \mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} b$

Zatem $(1-\alpha)\cdot 100\%$ przedział ufności dla par. μ:

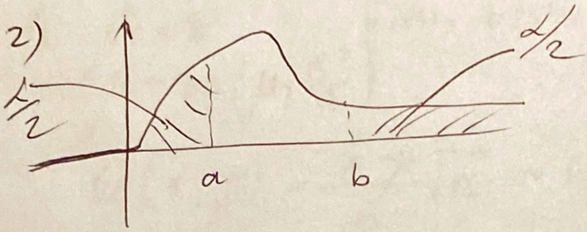
$$\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right); \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right)$$

Konstrukcja dla par. σ^2

1) $\hat{\sigma}^2 = S^2$ – ENMW

$$Q(X, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

2)



$$P(Q \le a) = \frac{\alpha}{2}$$
$$F_Q(a) = \frac{\alpha}{2}$$
$$a = F_Q^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$a = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$$

$$P(Q \geq b) = \frac{\alpha}{2}$$
$$P(Q < b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$
$$F_Q(b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$
$$b = F_Q^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$b = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)$$

3) $$a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b$$

Odpowiednio zatem $(1-\alpha)\cdot 100\%$ przedział ufności dla parametru σ^2:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \right)$$

WYKŁAD 5 | TESTY STATYSTYCZNE

① **Przykład** Rzucaliśmy monetę $n = 1000$ razy, przy czym otrzymaliśmy $k = 458$ orłów. Czy moneta jest symetryczna?

1. Ustalamy model statystyczny: <u>rozkład dwumianowy</u>

$Bin(1000, 0.5) \Rightarrow EX = np$

$EX = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$

Dostaliśmy $458 < 500$, ale czy to bardzo nieprawdopodobne?

Jeśli w wyniku eksperymentu dostaliśmy coś <u>bardzo nieprawdopodobnego</u>, wtedy powiemy <u>DOŚĆ (BASTA)</u>

O TYM MÓWI POZIOM ISTOTNOŚCI

2. Formułujemy dwie hipotezy:

H_0 – hipoteza zerowa – tzn. „Nic się nie dzieje"

H_1 – " – alternatywna tzn. „coś się dzieje" (przeciwna)

W naszym przypadku będą to:

H_0 – moneta jest symetryczna (tzn. liczbę orłów modeluje rozkład dwumianowy)

H_1 – moneta <u>nie</u> jest symetryczna.

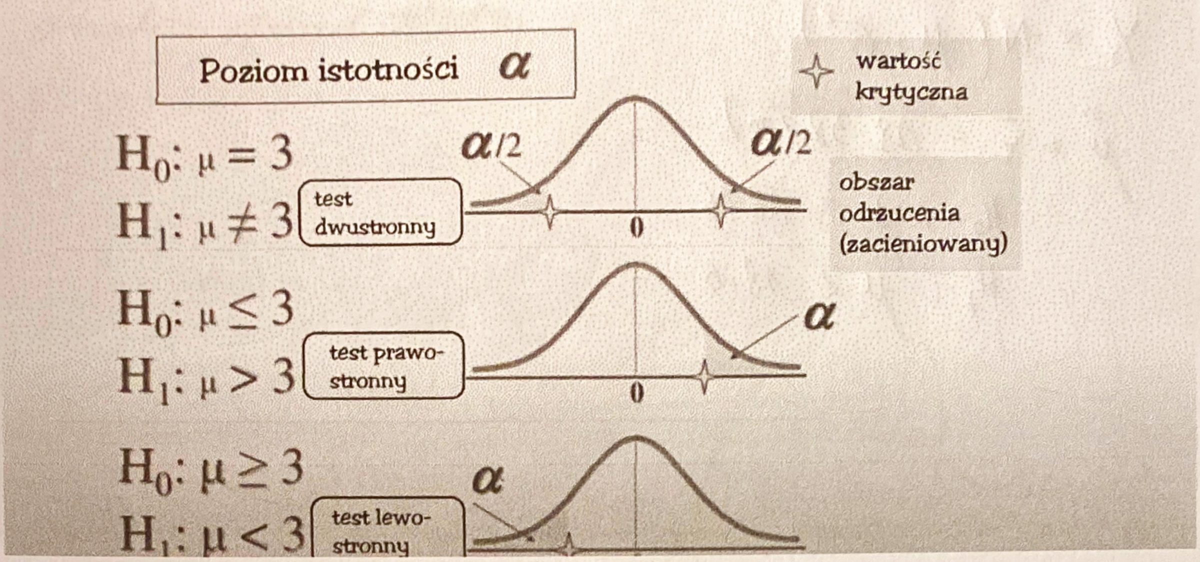
Jedna z tych H_0, H_1 jest prawdziwa. Musimy zakładać, że H_0 jest prawdziwe no chyba, że obliczenia wykażą, że H_0 trzeba odrzucić.

Jeśli przyjmiemy, że model istotności $\alpha = 0{,}05$

Jeśli to otrzymany wynik eksperymentu będzie ~~twat~~ miał prawd. mniejsze niż alfa to odrzucamy H_0. Jeśli nie, to nie możemy odrzucić H_0.

Odrzucamy H_0 jeśli otrzymane przez nas wyniki eksperymentu znajdzie się w OBSZARZE KRYTYCZNYM.

Poziom istotności a obszar odrzucenia dla testu



Prawdopodobieństwo tego błędu nie jest kontrolowane. Wiemy tylko, że jest możliwie minimalne.

		Decyzja	
		Przyjmujemy hipotezę zerową	Odrzucamy hipotezę zerową
„Rzeczywisty stan natury"	Hipoteza zerowa	Decyzja poprawna	Błąd I rodzaju
	Hipoteza alternatywna	Błąd II rodzaju	Decyzja poprawna

Prawdopodobieństwo tego błędu jest kontrolowane. Zawsze poniżej poziomu istotności.

Przykład:

H_0 - nie ma istotnych różnic (niewinny)

H_1 - są istotne różnice (winny)

Ogólna kontrola testu

$$R = \{ x ; T(x) \geq k \}$$

obszar krytyczny

wartość stat. testowej

wartość krytyczna

Przykład z wykładu (Auto-test)

1

X - dł. drogi hamowania

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

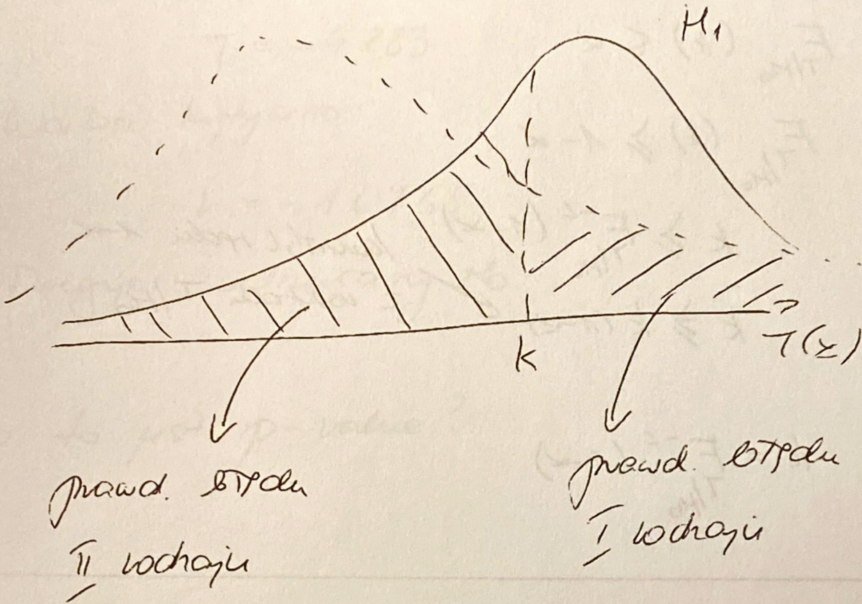
$\hat{\mu} = \bar{x} = 18{,}38$ [m]

$H_0: \mu = 18{,}6$

$H_1: \mu < 18{,}6$

Analiza prawd. błędów:

⑥



⑦

Błąd I rodzaju ≡ skazujemy osobę niewinną.

Błąd II rodzaju ≡ wypuszczamy osobę winną.

Wybór wartości krytycznej

Obieramy wartość α (poziom istotności testu)

1) prawd. błędu I rodzaju $\leq \alpha$,

2) prawd. błędu II rodzaju = minimalne

8

Wartość krytyczna:

$$P_0(T \geq k) \leq \alpha$$

$$1 - P_0(T < k) \leq \alpha$$

$$1 - F_{T|H_0}(k) \leq \alpha$$

$$F_{T|H_0}(k) \geq 1-\alpha$$

$$k \geq F^{-1}_{T|H_0}(1-\alpha)$$

$$k \geq k(1-\alpha)$$

kwantyl rzędu $1-\alpha$ z rozkładu $T|H_0$

Zatem

$$k = F^{-1}_{T|H_0}(1-\alpha)$$

9

Uwaga! Aby możliwe było wyznaczenie wartości k rozkład $T|H_0$ nie może zależeć od par. modelu.

Przykład: (a/auto test)

$H_0: \mu = \mu_0$ $[\mu = 18,6]$

$H_1: \mu < \mu_0$ $[\mu < 18,6]$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$$ test t-Studenta $T|H_0 \sim t(n-1)$

Zatem $R = \{\underline{x} : T(\underline{x}) \leq k\}$, gdzie

$$k = F^{-1}_{T|H_0}(\alpha) = t(\alpha, n-1)$$

(10)

Wartość stat. testowej:

$$T = -4.283$$

Wartość krytyczna:

$$k = -1.6765$$

Decyzja: odrzucamy H_0.

Co to jest p-value?

(11)

p-wartość

$$R = \{ \underline{x} : T(\underline{x}) \geq k \} =$$

$$= \{ \underline{x} : T(\underline{x}) \geq F^{-1}_{T|H_0}(1-\alpha) \} =$$

$$= \{ \underline{x} : F_{T|H_0}(T(\underline{x})) \geq 1-\alpha \} =$$

$$= \{ \underline{x} : P_0(T \leq T(\underline{x})) \geq 1-\alpha \} =$$

$$= \{ \underline{x} : \underbrace{P_0(T > T(\underline{x}))}_{\text{p-wartość}} \leq \alpha \}$$