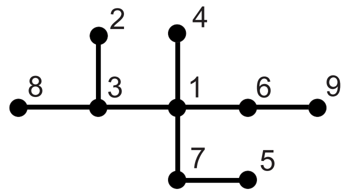
Rozgrzewka przed testem nr 3 z Matematyki Dyskretnej semestr zimowy 2018/2019.

Zadanie 1. .

a. Ile krawędzi jest w lesie na 79 wierzchołkach, składającym się z 21 drzew?

b. Podaj kod Prüfera podanego poniżej drzewa.



c. Bez odkodowywania podaj ciąg stopni drzewa o kodzie Prüfera $(1, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 8)$. Czy drzewo to jest scieżką?

d. Ile jest drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, 9\}$, o ciągu stopni (po uporządkowaniu): $(5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$?

e. Wyznacz liczbę drzew rozpiętych grafu na rysunku w zadaniu 4.

f. Czy 10–kostka Q_{10} ma obchód Eulera? Czy ma cykl Hamiltona?

g. Jaka jest liczba chromatyczna grafu pełnego k–dzielnego?

h. Jaki jest indeks chromatyczny cyklu na n wierzchołkach? Czy odpowiedź zależy od n?

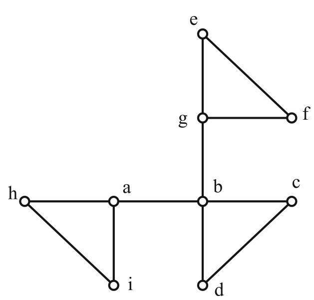
i. Kiedy graf pełny dwudzielny $K_{n,m}$ jest planarny?

j. 5–regularny płaski spójny graf prosty ma 20 ścian. Ile ma wierzchołków ten graf?

Zadanie 2. Pokaż, że jeżeli w grafie prostym G wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty, to G nie ma krawędzi cięcia.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że do cyklu C_k na $k, k \geqslant 4$, wierzchołkach dodajemy przekątną (krawędź o obu końcach należących do cyklu), którą następnie dzielimy nowym wierzchołkiem. Kiedy (dla jakiej przekątnej) tak uzyskany graf będzie miał największą liczbę drzew rozpiętych?

Zadanie 4. Do grafu na poniższym rysunku zastosuj algorytmy przeszukiwania wszerz (BFS) i w głąb (DFS), zaczynając od wierzchołka a i rozpatrując wierzchołki w kolejności alfabetycznej. Zanotuj dla BFS stany kolejki i krawędzie kolejno dodawane do tworzonego drzewa rozpiętego a dla DFS stany stosu i krawędzie kolejno dodawane do tworzonego drzewa rozpiętego. Który z tych dwóch algorytmów możemy użyć do znalezienia najkrótszej ścieżki między ustalonymi wierzchołkami?

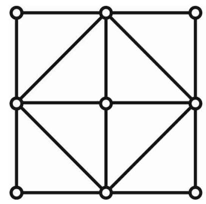


Zadanie 5. Korzystając z algorytmu Kruskala, znajdź optymalne drzewo rozpięte (o minimalnej sumie wag) w grafie zadanym macierzą wag. W każdym kroku zanotuj etykiety korzeni wierzchołków.

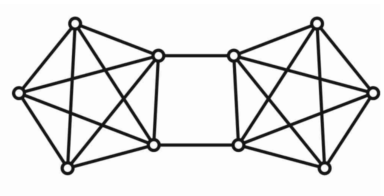
$$\begin{bmatrix} \infty & 1 & \infty & 13 & \infty & 5 \\ 1 & \infty & 10 & \infty & \infty & 7 \\ \infty & 10 & \infty & 2 & 4 & \infty \\ 13 & \infty & 2 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 4 & 8 & \infty & 12 \\ 5 & 7 & \infty & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Zadanie 6. Które z grafów na rysunku poniżej są: eulerowskie, półeulerowskie, hamiltonowskie, półhamiltonowskie? Odpowiedź uzasadnij.

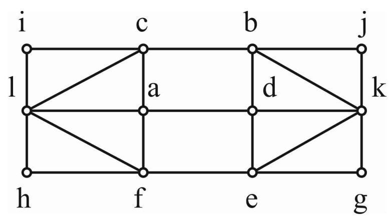
. a)



b)

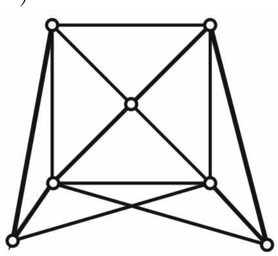


Zadanie 7. Korzystając z algorytmu Fleury'ego, znajdź szlak Eulera w grafie poniżej. Dlaczego w tym grafie nie ma obchodu Eulera?

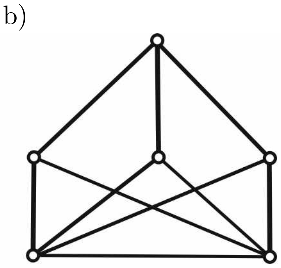


Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia Kuratowskiego, rozstrzygnij, które z grafów na rysunkach poniżej nie są planarne. Narysuj graf płaski odpowiadający pozostałym grafom.

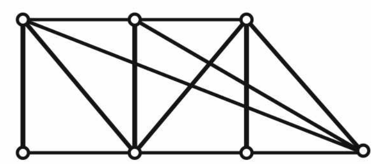
a)



b)



c)



Zadanie 9. Graf prosty G ma ciąg stopni

a) (5,5,4,4,3,3)

b) (5,5,4,4,4,4)

Czy G może być planarny? Jeśli nie, to uzasadnij. Jeśli tak, to podaj przykład grafu płaskiego o tym ciagu stopni.

Zadanie 10. Korzystając ze wzoru Eulera, znajdź oszacowanie górne na liczbę krawędzi (w stosunku do liczby wierzchołków) planarnego spójnego grafu prostego bez cykli o długości co najwyżej 5.

Zadanie 11. W pewnym mieście władze postanowiły wybudować metro. Ustalono już miejsca, gdzie będą stacje, znane są też koszty budowy bezpośredniego połaczenia tunelem między każdymi dwiema stacjami. Władze chcą wybudować metro tak, by z każdej stacji do każdej innej dało się dojechać (bezpośrednio lub pośrednio), a jednocześnie by koszt budowy był w sumie jak najniższy. Zinterpretuj problem w języku grafów. Za pomocą jakiego algorytmu można problem ten rozwiązać?