Odpowiedzi do pytań teoretycznych
Matematyka Dyskretna
Test 3

Pytanie 1. *Ile krawędzi ma drzewo o ν wierzchołkach? Udowodnij indukcją odpowiedni fakt.

Jeżeli G jest drzewem, to $\varepsilon(G) = \nu(G)$ - 1.

Indukcja względem $|V| = n$

$n = 1$ - jest spełnione, bo jeden wierzchołek nie ma krawędzi

$|E| = |V| - 1$

$|E| = 0$

$n \geqslant 2$ Istnieje $u, v \in G, \{u, v\} \in E$.

$G \setminus \{u, v\}$ - są to dwa drzewa G_1 na n_1 wierzchołkach i G_2 na n_2 wierzchołkach, gdzie $n_1 + n_2 =$ n oraz n_1,n_2 ¡ n

$|E(G_1)| = n_1 - 1$

$|E(G_2)| = n_2 - 1$

$|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$

Co należało dowieść.

Pytanie 2. Ile krawędzi ma las na ν wierzchołkach składający się z ω drzew? Uzasadnij odpowiedź.

$\varepsilon = v - \omega$, z każdą usuniętą krawędzią pomiędzy dowolnymi wierzchołkami otrzymujemy dwa drzewa. (Ponieważ to las, to nie ma cykli, więc bangla.)

Pytanie 3. *Co to jest krawędź cięcia? Jakie znasz warunki konieczne i dostateczne na to by dana krawędź e = uv była krawędzią cięcia?

Krawędzią cięcia grafu G nazywamy krawędź e taką, że $\omega(G - e) > \omega(G)$

Dla grafu G = (V,E) oraz krawędzi e o końcach u i v następujące warunki są równoważne:

1. e jest krawędzią cięcia grafu G,
2. $\omega(G - e) = \omega(G) + 1$,
3. u i v nie są spójne w G - e,
4. e nie jest zawarta w żadnym cyklu grafu G

Pytanie 4. Jak nazywa się graf, w którym wszystkie krawędzie są krawędziami cięcia? Odpowiedź uzasadnij.

Graf spójny jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego krawędź jest krawędzią cięcia. (Uzasadnienie jest w powyższym pytaniu)

Pytanie 5. Podaj definicję drzewa rozpiętego.

Rozpiętym drzewem, grafu G nazywamy spójny i acykliczny podgraf grafu G zawierającego wszytskie jego wierzchołki

Pytanie 6. *Podaj i krótko uzasadnij wzór rekurencyjny na liczbę drzew rozpiętych w grafie.

Niech G=(V,E) będzie grafem, a τ(G) oznacza liczbę rozpiętych drzew grafu G. Jeżeli e $\in$ E nie jest pętlą w grafie G, to

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G * e)$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli G nie jest grafem spójnym to $\tau(G) = 0$, a jeżeli G jest drzewem to $\tau(G) = 1$

Pytanie 7. Podaj twierdzenie Cayleya. Z czego skorzystaliśmy w dowodzie przedstawionym na zajęciach?

$$\tau(K_n) = n^{n-2}$$

Istnieje bijekcja między zbuorem wszystkich drzew rozpiętych grafu pełnego a zbiorem ciągów postaci $(t_1, t_2, ..., t_{n-2})$ takich, że 1$\leqslant$ t_i $\leqslant n$. Bijekcja ta nazywa się kodem Prufera.

Pytanie 8. *Co należy dodać do BFS, żeby w grafie bez wag znajdował on najkrótsze ścieżki z ustalonego wierzchołka do pozostałych?

Podczas przechodzenia przez graf dla każdego wierzchołka odwiedzanego po raz pierwszy zapisujemy jego poprzednika (to pozwala nam jednocześnie stwierdzić, ktore wierzchołki były odwiedzone). By otworzyć najkrótszą ściezkę z danego wierzchołka, wystarczy przejść po jego poprzednikach.

Pytanie 9. Opisz strukturę danych wykorzystywaną w BFS.

W BFS wykorzystywana jest kolejka. Jeśli jesteśmy w wierzchołku V_0 , który znajduje się na początku kolejki, to na koniec kolejki dodajemy wszystkie wierzchołki przyległe do V_0 (które jeszcze nie zostały odwiedzone) i wymazujemy z kolejki V_0 (V_0 i dodane wierzchołki tworzą krawędzue drzewa BFS). Czynność powtarzamy rozpatrując kolejne wierzchołki z początku kolejki, aż będzie pusta.

Pytanie 10. Opisz strukturę danych wykorzystywana w DFS.

W DFS wykorzystywany jest stos. Jeśli jesteśmy w wierzchołku V_0, który jest na szyczycie stosu, to bierzemy jeden dowolny wierzchołek przyległy do V_0, który nie został jeszcze odwiedzony i dodajemy go na szczyt stosu. Jeśli nie będzie można już nigdzie dojść z danego wierzchołka, wtedy zdejmujemy go ze stosu. Czynność powtarzamy, aż stos będzię pusty.

Pytanie 11. Opisz główną ideę algortmu Kruskala

Dla zadanego spójnego grafu wyznaczamy minimalne drzewo rozpinające.

Pytanie 12. *W jaki sposób w implementacji algorytmu Kruskala można sprawdzać, czy kolejną krawędź należy zaakceptować?

Do szybkiego rozpoznawania czy krawędź zamyka cykl możemy wykorzystać technikę etykietowania

Pytanie 13. *Jak algorytm Kruskala można wykorzystać do znalezienia drzewa rozpiętego o maksymalnej wadze? Odpowiedź uzasadnij.

Możemy wykonywać podany algorytm:

a) Należy posortować krawędzie grafu G malejąco według wag. Niech T będzie zbiorem krawędzi zawierającym drzewo rozpięte o maksymalnej wadze. Ustawiamy T=$\emptyset$.

b) Dodajemy pierwszą krawędź do T.

c) Dodajemy kolejną krawędź do T tylko i tylko wtedy, gdy nie tworzy ona cyklu w T. Jeśli nie ma już kolejnych krawędzi do dodania, kończymy.

d) Jeżeli T zawiera n - 1 krawędzi (gdzie n to liczba wierzchołków w G) kończymy i wypisujemy T. W innym przypadku wracamy do kroku c).

Pytanie 14. Podaj definicję grafu eulerowskiego i półeulerowskiego.

Szlak, który zawiera każdą krawędź grafu G nazywamu **SZLAKIEM EULERA** grafu G.

OBCHÓD grafu G to skończony, domknięty spacer przechodzący przez każdą krawędź G przynajmniej jeden raz.

OBCHÓD EULERA jest obchodem zawierającym każdą krawędź grafu G dokładnie jeden raz (po prostu szlak Eulera).

Graf nazywawy **EULEROWSKIM** jeżeli zawiera obchód Eulera.(Dokładnie raz, domknięty)

Graf nazywamy **PÓŁEULEROWSKIM** jeżeli zawiera szlak Eulera.(Dokładnie raz, ale nie musi być domknięty)

Niepusty spójny graf jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada wierzchołków o nieparzystym stopniu.

Graf spójny ma szlak Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma co najwyżej dwa wierzchołki stopnia nieparzystym stopniu.

Pytanie 15. Podaj warunek konieczny i dostateczny, by graf był eulerowski.

Warunek konieczny: graf G jest eulerowski jeśli posiada wszystkie wierzchołki stopnia parzystego.

Warunek dostateczny: jeżeli graf G ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego, to ma cykl Eulera (czyli jest grafem eulerowskim).

Pytanie 16. *Wywnioskuj z twierdzenia z poprzedniego pytania (podaj i udowodnij) warunek konieczny i dostateczny, by graf był półeulerowski.

Jeżeli w grafie G istnieje droga prosta (niekoniecznie zamknięta) zawierająca wszystkie krawędzie grafu G, to taką drogę nazywamy drogą Eulera, zaś graf ten nazywamy grafem półeulerowskim.

Twierdzenie o drodze Eulera: Graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

Wniosek: Z powyższego twierdzenia wynika, że w grafie półeulerowskim, każda droga Eulera musi mieć początek w jednym wierzchołku stopnia nieparzystego, a koniec w drugim takim wierzchołku.

Pytanie 17. Opisz główną ideę algorytmu Fleury'ego.

Do znalezienia ścieżki/obchodu Eulera. Najpierw wybieramy dowolny wierzcholek i dodajemy o do obchodu. Nastpnie dodajemy krawędź, która jest incydentna z ostatnio wybranym wierzcholkiem i nie jest krawędzią cięcia danego grafu z wymazanymi krawdziami, które ju odwiedziliśmy, o ile taka istnieje. Powtarzamy tę czynność, aż do drugiego kroku nie da się wykonać

Pytanie 18. Opisz problem chińskiego listonosza.

Listonosz odbiera przesyłki z poczty, dostarcza je a następnie wraca na pocztę. Musi oczywiście przejść przez każdą ulicę w swoim rejonie przynajmniej raz. Ze względu na ten warunek pragnie wybrać obchód w taki sposób by jak najmniej spacerować.

W grafie z wagami definiujemy wagę obchodu $v_0, e_1 v_1 ... e_n, v_n$ jako

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(ei)$$

Problem chińskiego listonosza sprowadza się do znalezienia obchodu o minimalnej wadze w spójnym grafie o nieujemnych wagach. Jeżeli G jest eulerowski, to obchód Eulera jest optymalny, ponieważ jest obchodem przechodzącym przez każdą krawędź dokładnie jeden raz.

Pytanie 19. Podaj definicję grafu hamiltonowskiego i półhamiltonowskiego.

Graf, który zawiera cykl Hamiltona nazywa się grafem Hamiltona(grafem Hamiltonowskim).

Graf, który zawiera ścieżkę Hamiltona nazywa się grafem półhamiltonowskim.

Ścieżka zawierająca każdy wierzchołek v ∈V(G) jest nazywana ścieżką Hamiltona grafu G.

Cykl Hamiltona to cykl, który zawiera wszystkie wierzchołki grafu G.

Pytanie 20. *Podaj i udowodnij warunek konieczny by graf był hamiltonowski.

Nie istnieje prosty warunek konieczny i dostateczny na to, by graf był hamiltonowski; można jednak podać szereg warunków koniecznych i osobno wystarczających na istnienie cyklu Hamiltona.

Jeżeli graf G jest hamiltonowski, to dla każdego niepustego podzbioru S zbioru wierzchołków V(G) zachodzi

$$\omega(G - S) \leqslant |S|$$

Powyższe twierdzenie stosujemy, by pokazać, że dany graf nie jest hamiltonowski.

Dowód: Niech C będzie cyklem Hamiltona grafu G. Wtedy dla każdego niepustego podzbioru S

$$\omega(C-S) \leqslant |S|$$

Ponieważ (C-S) jest grafem rozpiętym grafem (G-S) mamy równanie:

$$\omega(C-S) \leqslant \omega(G-S) \leqslant |S|$$

Co należało dowieść.

Pytanie 21. Opisz problem wędrującego komiwojażera.

Podróżujący komiwojażer pragnie złożyć wizytę w pewnych miastach i założmy, że chce on powrócić do punktu startowego. Mając dany czas podróży (koszt podróży) pomiędzy miastami, jak powinnien ułożyć plan podróży aby wizytować miasta co najmniej raz i aby ta podróż była najkrótsza (najtańsza). W termitologii grafowej sprowadza się to do szukania cyklu Hamiltowna (ścieżki Hamiltona) o minimalnej wadze w pełnym grafie ważonym.

Pytanie 22. Podaj definicję zbioru niezależnego wierzchołków.

Zbiór wierzchołków V'$\subset$ V, pomiędzy którymi nie ma żadnej krawędzi. Innymi słowy każda krawędź w G jest incydentna z co najwyżej jednym wierzchołkiem w tym zbiorze. Dokładna definicja w 8.5.1 Kolorowanie wierzchołków grafu

Pytanie 23. Podaj definicję zbioru niezależnego krawędzi – skojarzenia.

Podzbiór M zbioru krawędzi E nazywamy skojarzeniem grafu G jeżeli M nie zawiera pętli i żadne dwie krawędzie z M nie są przyległe.

Dwa końce krawędzi z M są skojarzone przez M.

Pytanie 24. Podaj definicję właściwego kolorowania wierzchołków grafu i liczby chromatycznej grafu.

Przez k-kolorowanie wierzchołków grafu G rozumiemy przyporządkowanie każdemu wierzchołkowi grafu G jednego z k kolorów 1, 2, ..., k. Kolorowanie jest właściwe jeżeli żadne dwa różne i przyległe wierzchołki nie są tego samego koloru.

Zatem właściwe k-kolorowanie wierzchołków grafu G (bez pętli) jest to podział $(V_1, ..., V_k)$ zbioru V(G) na k (być może pustych) zbiorów składających się z parami nieprzyległych wierzchołków)

Liczba chromatyczna χ(G) grafu G jest to najmniejsze k, dla którego G jest k-kolorowalny. Jeżeli χ(G) = k to o G mówimy, że jest k-chromatyczny.

Pytanie 25. Podaj definicję właściwego kolorowania krawędzi grafu i indeksu chromatycznego grafu.

K-kolorowanie krawędzi ζ grafu G (bez pętli) to przyporządkowanie każdej krawędzi grafu G jednego z k kolorów ze zbioru K=1,2 ... k. Kolorowanie ζ jest właściwe jeżeli żadne dwie przyległe krawędzie nie są tego samego koloru

Indeks chromatyczny (krawędziowa liczba chromatyczna) χ'(G) grafu G bez pętli, jest to najmniejsza liczba k dla której graf G jest k-kolorowalny krawędziowo. Graf G jest k-chromatyczny krawędziowo jeżeli χ'(G)=k

Pytanie 26. Podaj definicje grafu planarnego i grafu płaskiego.

Graf jest planarny (układany na płaszczyźnie) jeżeli może być narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, że jego krawędzie przecinają się jedynie w swoich końcach.

Planarne ułożenie grafu planarnego to graf płaski

Pytanie 27. Podaj twierdzenie Kuratowskiego

Twierdzenie Kuratowskiego - graf jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera on K_5 (graf pełny o pięciu wierzchołkach) lub $K_{3,3}$ (graf pełny dwudzielny o sześciu wierzchołkach, z których trzy są połączone z każdym z pozostałych trzech) ani też żadnego podziału tych grafów (inaczej grafu homomorficznego do któregoś z nich)

Pytanie 28. Podaj definicję grafu dualnego do grafu płaskiego.

Mając dany graf płaski G możemy zdefiniować inny graf G* w następujący sposób:
Każdej ścianie f grafu G odpowiada wierzchołek f* w G* i każdej krawędzi e z G odpowiada w G* krawędź e* przy czym dwa wierzchołki f* i g* z G* są połączone krawędzią w G* wtedy i tylko wtedy (eh znowu te wydry) gdy odpowiadające im ściany f i g są oddzielone przez krawędzie w G. Graf G* jest nazywany grafem dualnym grafu G. Łatwo zauważyć, że graf dualny G* do grafu płaskiego G jest planarny. Łatwo również pokazać, że jeśli G jest spójny, to graf dualny G** do grafu G* jest izomorficzny z G

Pytanie 29. *Podaj i udowodnij wzór Eulera.

Wzór Eulera. Jeżeli G jest spójnym grafem płaskim, to $\nu - \varepsilon + \varphi = 2$

Dowód:

1. φ=1 - G jest acykliczne, spójne drzewo

2. Wzór Eulera jest prawdziwy dla spójnych płaskich grafów w k ścianach (φ = k)

3. Wzór Eulera jest prawdziwy dla spójnych płaskich grafów w k+1 ścianach.

4. Niech G będzie spójnym, płaskim grafem o k+1 ścianach.
G ma conajmniej dwie ściany - G ma cykle.
Niech e będzie krawędzią, która nie jest krawędzią cięcia.
Niech (G-e) będzie spójnym, płaskim grafem o k ścianach

Z założenie indukcyjnego:
$\nu(G-e) - \varepsilon(G-e) + \varphi(G-e) = 2$

$\nu(G) - (\varepsilon(G) - 1) + k = 2$

$\nu(G) - \varepsilon(G) + \varphi(G) = 2$

Co należało dowieść.

Pytanie 30. Podaj wniosek ze wzoru Eulera o minimalnym stopniu grafu planarnego.

- Wszystkie grafy płaskie danego spójnego grafu planarnego mają taką samą liczbę ścian.
- Jeżeli G jest prostym grafem planarnym o v, v$\geqslant$3 wierzchołkach, to $\varepsilon \leqslant 3v - 6$.
- Jeżeli G jest prostym grafem planarnym to $\delta \leqslant$5.
- $K_5 i K_{3,3}$ nie jest planarny

Pytanie 31. *Udowodnij, że K5 nie jest grafem planarnym.

W przypadku K_5 jest to jasne, bo K_5 nie spełnia nierówności k ⩽3p-6, która jest warunkiem koniecznym planarności. (k - krawędzi, p - wierzchołki).

Mianowicie dla K_5 mamy p=5 i k=10, i 10 = k ⩽ 3p-6 = 9.

Co należało dowieść.

Pytanie 32. *Udowodnij, że $K_{3,3}$ nie jest grafem planarnym.

W przypadku $K_{3,3}$ nie ma tak dobrze bo
k = 9, p = 6
9 = k ⩽ 3p-6=12.

Potrzebna będzie jakaś sztuczka. Zauważmy, że $K_{3,3}$ jest dwudzielny, więc każdy jego cykl, a co za tym idzie granica każdego regionu, składa się z co najmniej 4 krawędzi.

Stąd w dowodzie nierówności f⩽k możemy napisać, że

$4f \leqslant r_1 + r_2 + ... + r_f \leqslant$ 2k

zamiast 3f ⩽ $r_1 + r_2 + ... + r_f \leqslant$ 2k jak w oryginale.

Stąd dostaniemy f ⩽ k = k.

Wstawiając do ostatniej nierówności f = k-p+2

otrzymujemy $2k - 2p + 4 \leqslant$ k, czyli k ⩽ $2p - 4$

a tej nierówności $K_{3,3}$ już nie spełnia.

Co należało dowieść.

Pytanie 33. Podaj twierdzenie o czterech kolorach.

Każdą mapę można pokolorować czterema kolorami. Jeśli graf G jest planarny, to $\chi(G)$ ⩽4

Mapa to graf płaski nie zawierający mostów. (Most – krawędź grafu spójnego której usunięcie z grafu rozspójnia go)