

Rozgrzewka przed testem nr 2 z Matematyki Dyskretnej semestr zimowy 2018/2019.

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij!!!

Zadanie 1. Znaleźć i udowodnić indukcją wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = \frac{7(n+2)}{2n} a_{n-1}, \text{ dla } n \geq 2, \quad a_1 = 14.$$

Zadanie 2. Niech a_n będzie liczbą ciągów długości n , zbudowanych z liter zbioru

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\},$$

w których żadne dwie spółgłoski nie występują obok siebie. Znajdź, uzasadnij i rozwiąż równanie rekurencyjne dla a_n .

Zadanie 3. Korzystając z faktu, że równanie charakterystyczne otrzymane z zależności rekurencyjnej dla ciągu a_n jest wielomianem stopnia 6 o pierwiastkach:

- $\alpha_{1,2} = -5$ – pierwiastek podwójny,
- $\alpha_{3,4,5} = 3$ – pierwiastek potrójny,
- $\alpha_6 = -3$ – pierwiastek pojedynczy,

podaj wzór na wyraz ogólny ciągu a_n .

Zadanie 4. Rozwiąż równanie rekurencyjne znajdując pierwiastki odpowiedniego równania:

$$a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2}, \text{ dla } n \geq 2, \quad a_0 = 3, \quad a_1 = 3.$$

Zadanie 5. Rozwiąż równanie rekurencyjne znajdując pierwiastki odpowiedniego równania:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \text{ dla } n \geq 2, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Zadanie 6. Wyraz ogólny ciągu a_n spełniającego warunki początkowe

$$a_0 = 12, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 15, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 27,$$

dany jest wzorem

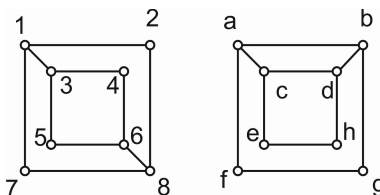
$$a_n = (C_1 \cdot n^2 + C_2 \cdot n + C_3)(-2)^n + C_4(-1)^n + C_5, \text{ dla } n \geq 0.$$

Podaj układ równań (NIE ROZWIĄZUJ), z którego można wyznaczyć stałe w powyższym wzorze.

Zadanie 7. .

- Ile krawędzi ma dopełnienie grafu prostego na 9 wierzchołkach i o 16 krawędziach?
- Jaki ciąg stopni ma dopełnienie pełnego trójdzielnego grafu prostego $K_{2,3,4}$?
- Ile krawędzi ma dopełnienie grafu prostego na 9 wierzchołkach i o ciągu stopni $(2, 2, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 3)$?
- W grafie na 13 wierzchołkach i o 45 krawędziach są **tylko** wierzchołki stopnia 10, stopnia 5 i stopnia 7. Wierzchołków stopnia 7 jest tyle samo co wierzchołków stopnia 5. Ile jest wierzchołków stopnia 10?
- Co możesz powiedzieć o prostym grafie o 3 składowych spójności, w którym mamy dokładnie 4 wierzchołki stopnia 1 a pozostałe wierzchołki są stopnia 2?
- Ile najmniej i ile najwięcej krawędzi może mieć graf prosty na 15 wierzchołkach i o 8 składowych spójności?

Zadanie 8. Czy podane grafy są izomorficzne?



Zadanie 9. Graf prosty G jest 6-regularny a S jest podzbiorem jego zbioru wierzchołków mocy 8 ($|S| = 8$), dla którego podgraf indukowany $G[S]$ zawiera 12 krawędzi. Ile krawędzi grafu G ma dokładnie jeden koniec w S ?

Zadanie 10. Dany jest graf prosty G , który ma 30 wierzchołków i 15 krawędzi. Ile najmniej i ile najwięcej składowych spójności może mieć graf G ? Opisz jak wygląda graf o najmniejszej możliwej liczbie składowych spójności i jak wygląda graf G , jeśli ma największą możliwą liczbę składowych spójności.

Zadanie 11. Ile maksymalnie krawędzi może mieć graf prosty na 16 wierzchołkach i o czterech składowych spójności, w którym nie ma wierzchołków izolowanych?

Zadanie 12. Zbadaj, które z wymienionych poniżej ciągów są ciągami stopni jakiegoś grafu prostego. Jeżeli ciąg jest graficzny, to narysuj jeden z grafów o odpowiednim ciągu stopni wierzchołków, jeśli ciąg nie jest graficzny, to wyjaśnij dlaczego tak sądzisz.

- a. $(7, 7, 7, 5, 5, 4, 3, 2)$,
- b. $(6, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$,
- c. $(5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 1)$.

Zadanie 13. Narysuj wszystkie nieizomorficzne dwudzielne grafy proste na 6 wierzchołkach i o 6 krawędziach.

Zadanie 14. Narysuj wszystkie nieizomorficzne drzewa na 8 wierzchołkach i o maksymalnym stopniu 5.