Rozgrzewka przed testem nr 1 z Matematyki Dyskretnej semestr zimowy 2018/2019.

Zadanie 1.

(a) "Pośród dowolnych 36 różnych liczb naturalnych zawsze znajdziemy K liczb dających, w dzieleniu przez 7, tę samą resztę."

Podaj maksymalną wartość K, dla której powyższe zdanie jest prawdziwe. Na jakiej podstawie możemy tak twierdzić?

(b) Mając do dyspozycji sześć rodzajów cukierków ile możemy utworzyć różnych paczuszek z 12 cukierkami?

(c) Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 23; \quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6\ ?$$

(d) Na ile sposobów możemy rozłożyć 18 rozróżnialnych kul w 5 rozróżnialnych szufladkach?

(e) Na ile sposobów możemy włożyć 35 jednakowych listów do 45 ponumerowanych przegródek tak, by w każdej przegródce znalazł się co najwyżej jeden list?

(f) Do 5 wagonowego tramwaju wsiada 14 osób (osoby i wagony są rozróżnialne). Podaj liczbę możliwości, dla których do pierwszego wagonu wsiadło 3 pasażerów, do drugiego 2, do trzeciego 5, do czwartego 1, a do ostatniego pozostałe 3 osoby.

Zadanie 2. Znaleźć i udowodnić indukcją wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = \frac{7(n+2)}{2n} a_{n-1}, \qquad a_1 = 14\,.$$

Zadanie 3. Wskazać bijekcję pomiędzy rozmieszczeniami 80 jednakowych kul w 6 rozróżnialnych szufladkach a odpowiednimi ciągami binarnymi i stąd wywnioskować ile jest takich rozmieszczeń.

Zadanie 4. Franek wygenerował 1000 haseł składających się z 4 **różnych** znaków ze zbioru {0,1,2,3,*,%,?}, z których każde zawiera znak $*$. Pokaż, że wśród tych haseł znajdziemy co najmniej 3 identyczne.

Zadanie 5. Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 61$$

przy założeniu, że

$$x_1 > 2\,,\ x_2 > 2\,,\ x_3 > 3\,,\ x_4 > 4\,,\ x_5 > 7\,,\ x_6 \leqslant 2\,.$$

Zadanie 6. Mając do dyspozycji róże w czterech kolorach - żółtym, czerwonym, fioletowym i niebieskim - ile możemy utworzyć różnych bukietów z 17 kwiatami, przy założeniu, że każdy z nich musi zawierać co najmniej 5 róż czerwonych i co najwyżej jedną różę fioletową?

Zadanie 7. Do 7 wagonowego pustego tramwaju wsiada 12 osób (osoby i wagony są rozróżnialne). Podaj liczbę możliwości, dla których żaden wagon nie pozostaje pusty.

Zadanie 8. Rozpatrując 10–elementowe wariacje (ciągi) z powtórzeniami, utworzone z elementów zbioru $\{A, B, C\}$ podaj ile wynosi suma

$$\sum_{k=0}^{10} \left[\binom{10}{k} \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} \right].$$

Swoją hipotezę uzasadnij.

Zadanie 9. Ile jest ciągów długości 8 zbudowanych z dwóch liter A, z dwóch liter B, z dwóch liter C i z dwóch liter D, w których żadne dwie takie same litery nie występują obok siebie.

Zadanie 10. Na ile sposobów możemy włożyć 18 rozróżnialnych kul do 5 rozróżnialnych ur tak, aby w pierwszej urnie były co najmniej 3 kule? Jaka będzie odpowiedź w przypadku gdy kule są jednakowe?