Języki formalne

7/10

Literatura:

* G. Rezesz Introduction of Formal Languages.
* M. Sipser Wprowadzenie do teorii obliczeń
* J. Hopcroft Wstęp do teorii automatów, języków i obliczeń

$\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ => NIE MOŻEMY ICH WYREPREZENTOWAĆ W KOMPUTERZE WSZYSTKICH

np. 2, dwie owy itd => reprezentacja liczb.

materialna reprezentacja liczb

- = ≡

Posługując się urychemiem cyfrowym chodzimy na liczbach

Reprezentacje:

* unarna (np. IIII ... $n+1$)
* pozycyjna (np binarna, decymalna itp)

$\underbrace{\text{III} \ldots \text{III}}_{101} \xrightarrow{\log} 100$

$\xleftarrow{\text{wykładnicze}}$

V - niepusty, skończony zbiór symboli w alfabetach

np. $V = \{a, b, c \ldots z\}$

Słowo nad alfabetem V - dowolny, skończony ciąg znaków z V.

Ciąg (słowo) długości zero oznaczamy ε.

V^* - zbiór wszystkich

V^+ - -II- bez

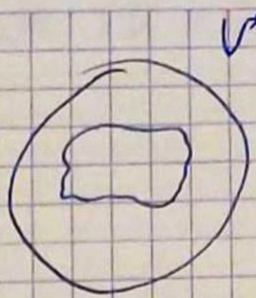
$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$

Nad alfabetem łacińskim

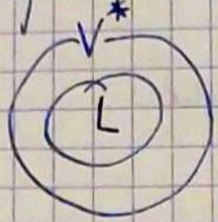
$V = \{a, b, c .. z\}$

cat $\in V^*$

kot $\in V^*$



Językiem nad alfabetem V nazywamy dowolny podzbiór $L \subset V^*$



KONTAGENACJA

Symantyka →

sematyka → o poprawnej budowie

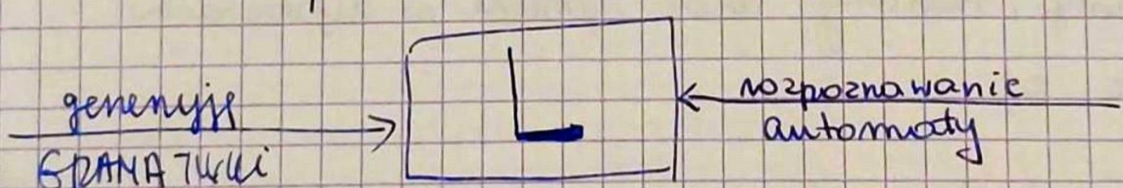
Małe dziewczynki chodzą parami. ⇒ POPRAWNE SEMANT.

Mistrne słowy ~~fatają na ucieho~~ grają zwawo ⇒ POPRAWNE SEMANT., ale nie SYMANTYCZNIE

Dlaczego my się rozumiemy? BO MAMY KONTEKS.

Generowanie

będą odpowiedzialne gramatyki



Słowa to są ciągi z alfabetu (oznaczamy P, Q, R)

Konk. P i Q oznacz. przez PQ nazywamy się zdefiniowany

a) jeśli $P = a_1 \dots a_n$, $Q = b_1 \dots b_m$ $m, n \geq 1$

to $PQ = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$

ii) jeśli $P = \varepsilon$ $(Q = \varepsilon)$ to $PQ = Q$ $(PQ = P)$

$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$

$P\varepsilon = \varepsilon P = P$

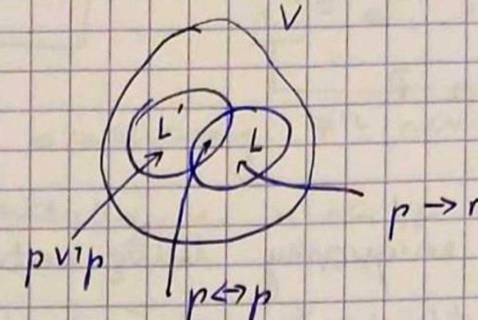
JFZ wykład 2 - 14/10

generuje → $\boxed{\text{język}}$ ← rozpoznawanie
GRAMATYKI automaty

$p \wedge q \vee r$, $p \to q \to r$ <=> zdania są niejednoznaczne

V^* - zbiór wszystkich słów nad V (z ε)

$L \subset V^*$



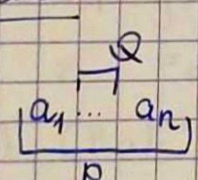
GRUPA:

$\boxed{\text{WYJĄTEK } \varepsilon\varepsilon = \varepsilon}$

1) łączne
2) posiada element neutralne
3) $\forall_{a \in A} \exists_{a^{-1}} \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$; $\underbrace{V^*, \text{konkatenacja}, \varepsilon,}_{\text{NIE ZACHODZI}}$

półgrupa z jedynką

Podsłowo



Podsłowo - mówimy, że Q jest podsłowo słowa P i oznaczamy $Q \sqsubseteq P$ <=> istnieją ciągi (słowa) Q_1, Q_2 tm

$$P = Q_1 Q Q_2$$

$P = abcd$

a, ε bcd
ab, ε cd
abc, ε d
abcd, ε, ε
ε, ε abcd

Q_1 Q_2

$Q_1 = \varepsilon$, to Q nazywamy prefiksem

$Q_2 = \varepsilon$, to Q nazywamy sufiksem

$n!$ - sufitsowe

$2+3$, $4 \cdot 2$ → infitsowe

$p \| l$, $p \perp l$

a^b -> brak operacji

$|P|$ - dł. słowa P

$\boxed{aaaa}$ podsłowo sł. aaaa (nie więcej niż n)

$\varepsilon aaaa$ $aaa\varepsilon a$

$a\varepsilon aaa$ $aaaa\varepsilon$

$aa\varepsilon aa$

PR.D słowa dł. n zwraca podzbiór tych podsłów oraz liczbę tych podsłów

, p= rewolwerowiec

Dł. słowa P nazywamy liczbę naturalną zdefiniowaną indukcyjnie. (liczba wystąpień znaków w ciągu)

(i) $|\varepsilon| = 0$

(ii) $|Pa| = |P| + |a| = |P| + 1$

$x = aabb \Rightarrow |x| = 4$, ale liczba znaków to 2

$|PQ| = |P| + |Q|$

Dowód indukcyjny: $\forall P, Q : |PQ| = |P| + |Q|$ po dł. $|Q|$

i) $Q = \varepsilon$ $|\varepsilon| = 0$

$L: |PQ| = |P\varepsilon| = |P|$

$P: |P| + |Q| = |P| + |\varepsilon| = |P| + 0 = |P|$

$= \quad L = P$

cnd.

Założenie indukcyjne

$|PQ| = |P| + |Q|$ $|P| = k \leq n$

Tw. indukcyjne

$|P(Qa)| = |P| + |Qa|$

operacja kontagenacji jest łączna

$L: |P(\overset{\text{podstawowo}}{Qa})| \underset{\text{łącz.}}{=} |\cancel{Pa\theta}\,(PQ)a| \overset{\text{def. (ii)}}{=} |PQ| + 1 \overset{\text{zk. 1}}{=} (|P| + |Q|) + 1 =$

$\overset{\text{zk. łącz.}}{=} |P| + (|Q| + 1) \overset{ii}{=} |P| + |Qa|$

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$

$\underbrace{PPP}_{3\ P\ \text{kontegenowane}} = P^3$

$a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a$

n-tą potęgą słowa P oznaczamy P^n nazywamy

słowo zdefiniowane indukcyjnie w następ. sposób:

(i) $P^0 = \varepsilon$

(ii) $P^{n+1} = P^n P$

$\cancel{P^*}$ $P^1 = P$

$aa\,bb = a^2 b^2 \neq abab = (ab)^2$

P^{-1} - oznaczamy odbicie zwierciadlanym (rewersem) sł. od tyłu P

Dowód indukcyjny „P^{-1}":

(i) $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$

(ii) $(Pa)^{-1} = a P^{-1}$

$(\underbrace{ab}_{P}c)^{-1} = c(\underbrace{ab}_{P})^{-1} = c(b(a^{-1})) =$

$= c(b(\varepsilon a^{*})^{-1}) =$

$= c(b(a(\varepsilon^{-1}))) \overset{i}{=}$

$= c(b(a(\varepsilon))) = cba$

$(PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1}$

$(P^n)^{-1} = (P^{-1})^n$

$(P^{-1})^{-1} = P$

Językiem nad alf. V będziemy nazywać dowolny podzbiór V^*, tj $L \subset V^*$

$L_1 \cup L_2$

$L_1 \cap L_2$ $\quad \bar{L} = V^* \setminus L$

$L_1 \setminus L_2$

$V^* \circ V^*$

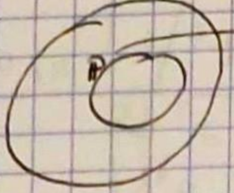
$A \subset A \quad p \to p$

$\emptyset \subset A \quad 0 \to p$

JF2 - wykład 3

21/10

I - zbiór instancji



zbiór instancji pozytywnych

$\emptyset \subset A$

$L \subset V^*$

$\mathbb{P}$ "I"

$(I, \mathbb{P})$ - problem decyzyjny

$L_1 = (a, b, c)$ $3 \cdot 3 \cdot$ = 9

$L_2 = (d, e, f)$

co najwyżej : 9

$L_1 L_2 = \{ P_1 P_2 : P_1 \in L_1, P_2 \in L_2 \}$

$\overline{\overline{L_1}} = 3$

$\overline{\overline{L_2}} = 3$

$L_1 \backslash L_2$	b	b^2	ab
ε	b	b^2	ab
a	ab	ab^2	a^2b
ab	ab^2	ab^3	$(ab)^2$

$\overline{\overline{L_1}} = n$, $\overline{\overline{L_2}} = m$ } max. $m \cdot n$

Budowa ab^2, może być $\Rightarrow$ $(ab)b = a(b^2)$.

zad.

$L_1 = \{ a^n : n \geq 1 \}$

$L_2 = \{ b^n : n \geq 1 \}$

$L_1 \backslash L_2$	b	b^2	b^3	...
a	ab	ab^2	ab^3	
a^2	a^2b	a^2b^2	a^2b^3	
a^3	a^3b	a^3b^2	a^3b^3	
⋮				

$\mathbb{L}$

X

$\mathbb{L} = L_1 L_2 = \{ P_1^n P_2^m : \cancel{P_1 P_2 \in} \; n, m \geq 1 \}$

$X = L_1 L_2 = \{ a^n b^n : n \geq 1 \} \Leftarrow$ ODPOWIEDZ BŁĘDNA bo n jest globalne.

$P^n = \underbrace{P \ldots P}_{n}$

$P^3 = PPP$

P^n
$\hookrightarrow$ (i) $P^0 = \varepsilon$
(ii) $P^{n+1} = P^n P$

$L_1 \emptyset = \{ P_1 P_2 : P_1 \in L_1, P_2 \in \emptyset \} = \emptyset$

$\emptyset \emptyset = \emptyset$

$\emptyset L = \emptyset$

L^n

(i) $= L^0 = \{\varepsilon\}$

(ii) $= L^{n+1} = L^n L$

$L^1 = L$

$L^1 = L^{0+1} = L L^0$

$\varepsilon, \emptyset, \{\varepsilon\} \Longrightarrow \varepsilon, \{\ \}, \{\varepsilon\}$

type: String, set, set

$L = \{a, ab\}$

$L^3 = L^2 L = (LL)L$

$L \backslash L$	a	ab
a	a^2	a^2b
ab	aba	$(ab)^2$

$L^2 \backslash L$	a, ab
a^2	
a^2b	
aba	
$(ab)^2$	

$P \in L^4$

$P = P_1 P_2 P_3 P_4 : P_i \in L$

$L_1 \backslash L_1$	ε	a
ε	$\varepsilon\varepsilon$	$\varepsilon a = a$
a	$a\varepsilon = a$	a^2

zad $L_1 = \{\varepsilon, a\}$

$L_2 = \{a\}$

$L_2 \backslash L_2$	a
a	a^2

$L_1^0 = \{\varepsilon, \cancel{a}\} = \{\varepsilon\}$

$L_1^1 = \{\varepsilon, a\}$

$L_1^2 = \{\varepsilon, a, a^2\}$

$L_1^3 = \{\varepsilon, a, a^2, a^3\}$

$L_1^4 = \{\varepsilon, a, a^2, a^4, a^3\}$

$L_2^0 = \{\varepsilon\}$

$L_2^1 = \{a\}$

$L_2^3 = aaa = \{a^3\}$

$L_2^4 = aaaa = \{a^4\}$

$L_2^2 = aa = a^2$

$\{\varepsilon, \{\varepsilon, a\} \ldots\}$

$\bigcup_{n \geq 0} L_1^n = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \ldots = \{\varepsilon, a, a^2, \ldots\} = \{a^n : n \geq 0\}$

$\bigcup_{n \geq 0} L_2^n = L_2^0 \cup L_2^1 \cup L_2^2 \ldots = \{\{\varepsilon\}, \{a\}, \{a^2\} \ldots\} = \{a^n : n \geq 0\}$

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n \longrightarrow$ DOMKNIĘCIE KLENE'EGO.!

$P \in L^7$ $\quad$ $P \in L^* \Leftrightarrow \exists_n (P \in L^n)$

łatwiejsze $\quad$ trudniejsze

Domknięcie Kleenego:

* nie jest różnowartościowe.

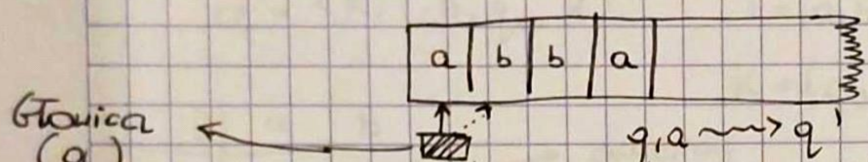
$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n \Rightarrow \text{POZYTYWNE DOMKNIĘCIE KLEENEGO}$$

$$\varepsilon \in L^+ \Leftrightarrow \varepsilon \in L_1$$

$$(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$$

$$(L^*)^* = L^*$$

DETERMINISTYCZNE AUTOMATY SKOŃCZENIE STANOWE



$\langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$

T - skończony alf. wejściowy

K - skończony zb. stanów

$H \subset K$

zbiór stanów akceptujących

q_0 - stan początkowy

δ - f. przejścia

$\delta: K \times T \rightarrow K$

$$\delta(q, a) = q' \Leftrightarrow q, a \rightsquigarrow q'$$

DETERMINISTYCZNY AUTOMAT SKOŃCZONIE STANOWE

$\alpha = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$

zbiory skończone

δ	a	b
$\to q_0$	q_0	q_2
q_1	q_2	q_2
q_2	q_0	q_2

$T = \{a, b\}$

$K = \{q_0, q_1, q_2\}$

q_0 - element początkowy (strzałka)

q_1 - element

NIEDETERMINISTYCZNY AUTOMAT SKOŃCZENIE STANOWY

$\alpha = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$ $T = \{a, b\}$

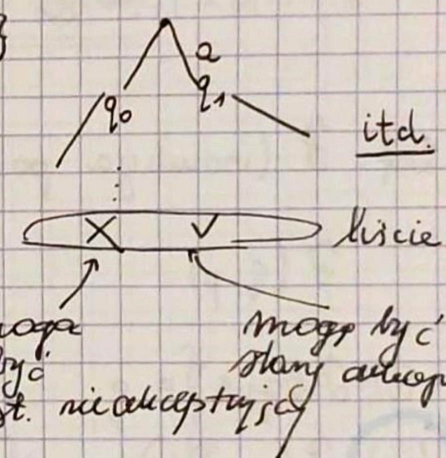
$K = \{q_0, q_1, q_2\}$

δ	a	b
$\to q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_2	q_2
q_2	q_0	q_2

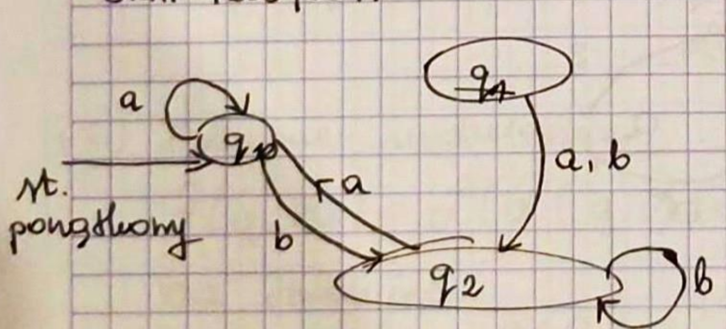
dajemy możliwość wyboru

$\delta: K \times T \to P(K)$

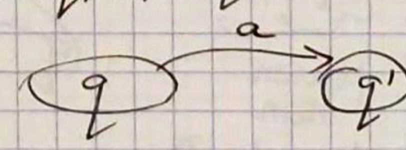
$Q_0 = q$ - zbiór stanów



GRAF PRZEJŚCIA



np. $\delta(q, a) = q'$

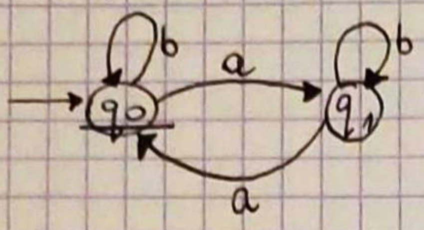


Powyższy automat nie akceptuje niczego ponieważ automat nie kończy się w stanie q_1.

zad.

$P \in \{a, b\}^*$

a występuje w P parzyście wiele razy



GRAF PRZEJŚCIA

Wprowadźmy język akceptowany przez automat $L(\mathcal{A})$.

$\delta : K \times T \to K$

Podobny roz. funkcję przejścia

$\hat{\delta} : K \times T^* \to K$

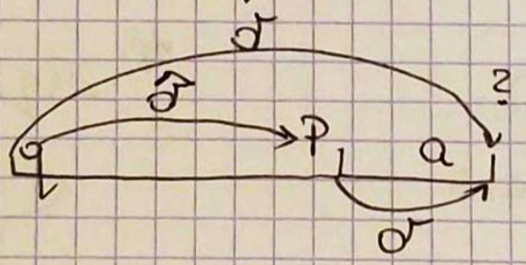
Def. $\hat{\delta}$ (indukcja po $|P|$)

$\hat{\delta}(q, P)$

(i) $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$

(ii) $\hat{\delta}(q, Pa) = \delta(\hat{\delta}(q, P), a)$

$\underbrace{\hat{\delta}(q, P)}_{\text{pewien stan od } q \text{ do } P}$



δ	a	b
q_0	q_0	q_2
q_1	q_2	q_2
q_2	q_0	q_2

$$\hat{\delta}(q_1, ba) = \delta(\hat{\delta}(q_1, b), a) =$$
$$= \delta(\hat{\delta}(q_1, \varepsilon b), a) = \delta(\delta(\underbrace{\hat{\delta}(q_1, \varepsilon)}, b), a$$
$$\delta(\delta(q_1, b), a) =$$

$$L(\mathcal{A}) = \{P \in T^* : \hat{\delta}(q_0, P) \in H\}$$

$$\hat{\delta}(q, PQ) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, P), Q)$$

DLACZEGO $\hat{\delta}$ NAZYWAMY FUNKCJĘ ROZSZERZONĄ?

$T \subset T^*$ $\quad$ T

$$\underline{\underline{\hat{\delta}(q, a)}} = \hat{\delta}(q, \varepsilon a) \stackrel{ii}{=} \delta(\underbrace{\hat{\delta}(q, \varepsilon)}_{q}, a) \stackrel{i}{=} \underline{\underline{\delta(q, a)}}$$

Indukcja po $|Q|$

(I) $|Q| = \varepsilon$

$$\mathbb{L}: \hat{\delta}(q, PQ) = \hat{\delta}(q, P\varepsilon) = \hat{\delta}(q, P)$$
$$\mathbb{P}: \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, P), Q) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q, P)}_{z(i)} \varepsilon) = \hat{\delta}(q, P)$$
$$\Big\} \; \mathbb{L} = \mathbb{P}$$

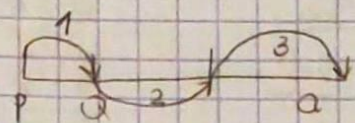
(II) Założenie indukcyjne

$$\hat{\delta}(q, PQ) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, P), Q)$$

Teza indukcyjna

$$\hat{\delta}(q, P(Qa)) = \cancel{\hat{\delta}(\hat{\delta}(P(Qa)}$$
$$\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, P), Qa)$$

$\mathbb{L}: \delta(q, P(Qa)) \xrightarrow[\text{konkatenacji}]{\text{z łączności}} \hat{\delta}(q,(PQ)a) \overset{ii}{=} \delta(\underbrace{\hat{\delta}(q, PQ)}_{zi}, a) =$



$= \delta(\underbrace{\hat{\delta}(\underbrace{\boxed{\hat{\delta}(q,P)}}_{1}, Q)}_{2}, a)$ 3

$\delta(\hat{\delta}(\Box, Q)), a) \overset{ii}{\longleftarrow} \hat{\delta}(\Box, Qa) =$

$= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, P), Qa)$

NIEDETERMINISTYCZNE AUTOMATY SKOŃCZENIE STANOWE

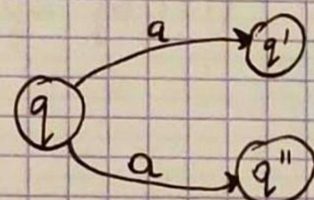
δ	a	...
q_0	$\{\ \}$	
	$\emptyset$	

mogą stać zbiory stanów.

$\delta(q,a) - \delta(q^a) = \{q', q''\}$

* MOŻLIWY BRAK ZACHOWANIA DEFINICJI FUNKCJI

* MOŻEMY NIE „ZJADAĆ" CAŁEGO SŁOWA GDY „$\emptyset$" AUTOMAT SIĘ ZATRZYMA



$K = \{q_0, q_1, q_2\}$

ILE PODZBIORÓW $\underline{8} \Longrightarrow \{\{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}\} \Longrightarrow 3$

$\{\{q_1 q_0\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0 q_2\}\} \Longrightarrow 3$

$\{q_0 q_1, q_2\} \Longrightarrow 1$

$\{\emptyset\} \Longrightarrow 1$

8 zbio

$\mathcal{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle : Q_0 \subset K$

$\delta: K \times T \to P(K)$

Wykład - 5 - 4.11.2019

$\delta : K \times T \to K$

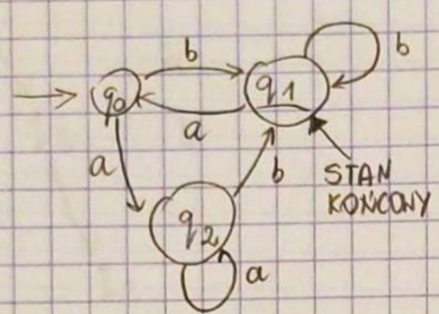
$\hat{\delta} : K \times T^* \to K$

$\hat{\delta}(q, P)$

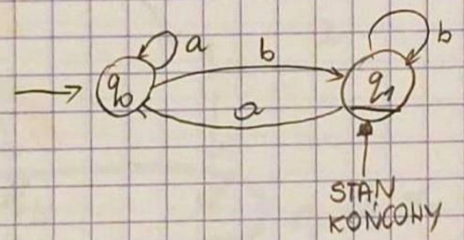
$L(\alpha) = \{ P \in T^* : \hat{\delta}(q_0, P) \in H \}$

Zad. $T = \{a, b\}$. Narysuj diagram deterministyczny.

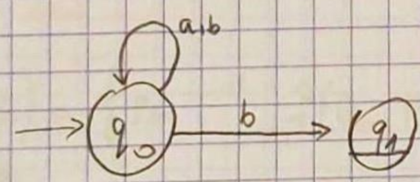
$P \in L(\alpha)$ wtedy P kończy się symbolem b.



DETERMINISTYCZNY



DETERMINISTYCZNY LEPSZY



NIEDETERMINISTYCZNY

$\delta(q_0, a) \rightsquigarrow \{q_0\} \in P(\{q_0, q_1\})$ $\qquad \{q_1\} \in P(\{q_0, q_1\})$

$\delta(q_0, b) \rightsquigarrow \{q_0, q_1\} \in P(\{q_0, q_1\})$

$\delta(q_1, a) \to \emptyset \in P(\{q_0, q_1\})$

$P(A)$ - podzbiory zb. A $\Rightarrow$ 2^A (inne oznaczenie)

$\overline{\overline{A}} = n$

$\overline{\overline{P(A)}} = 2^n = 2^{\overline{\overline{A}}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$

Niedeterministyczny automat skończenie stanowy to piątka

$$\mathcal{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$$

w której:

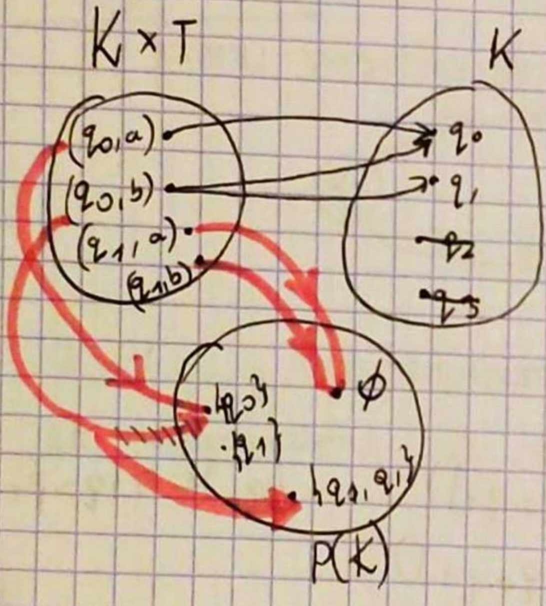
K, T, H są określone jak w deterministycznym

$Q_0 \subset K$ jest ~~zbiorem~~ stanów początkowych

a δ jest funkcją

$$\delta : K \times T \longrightarrow P(K)$$

δ	a	b
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$



(K

Zadanie domowe

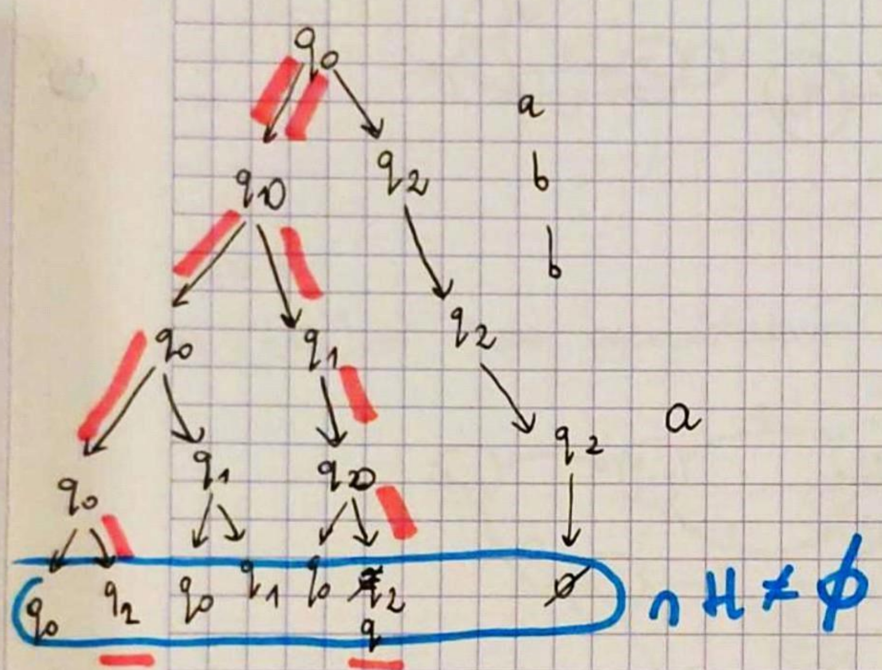
→ DIAGRAM AUTOMATU

→ ODGADNOĆ JĘZYK

→ NAPISAĆ DETERMINISTY.

δ	a	b
$\to q_0$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\underline{q_2}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

np. $P = abba$, $H = \{q_2\}$, $Q = \{q_0\}$



$\{q_0\}$	q^{0}
$\{q_0, q_2\}$	q^{01}
$\{q_1, q_2, q_0\}$	q^{012}
$\{q_0, q_1, q_2\}$	q^{012}

niedet.

$$L(\alpha) = \{P \in T^* ; \hat{\delta}(Q_0, P) \cap H \neq \emptyset\}$$

$\delta : K \times T \to P(K)$

$\hat{\delta} : P(K) \times T^* \to P(K)$

(i) $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$

(ii) $\hat{\delta}(q, P) = \delta(\hat{\delta}(q, P), a)$

(i) $\hat{\delta}(A, \varepsilon) = A$

(ii) $\hat{\delta}(A, Pa) =$

$= \bigcup_{q \in \hat{\delta}(A, P)} \delta(q, a)$

MOŻNA PRZEROBIĆ NIEWSZYSTKIE

NIEDETERM $\xrightarrow{\text{TAK}}$ DETERM.

DETERM. $\xrightarrow{\text{TAK}}$ NIEDETERM

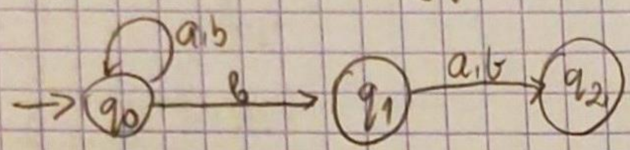
TWIERDZENIE SCOTT'A

Dla każdego niedeterministycznego automatu α skończenie stanowego można skonstruować automat deterministyczny automat α'

$$L(\alpha) = L(\alpha')$$

$T = \{a, b\}$

2-gie od końca pozycja



JFZ - wykład 6

18/11

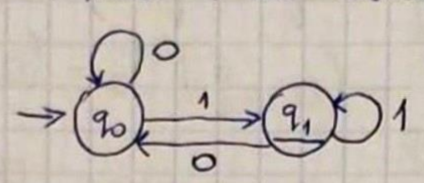
Tw. Scotta

Dla dowolnego niedet. automatu skończenie stanowy α można skonstruować at. det. α' taki, że

$$L(\alpha) = L(\alpha')$$

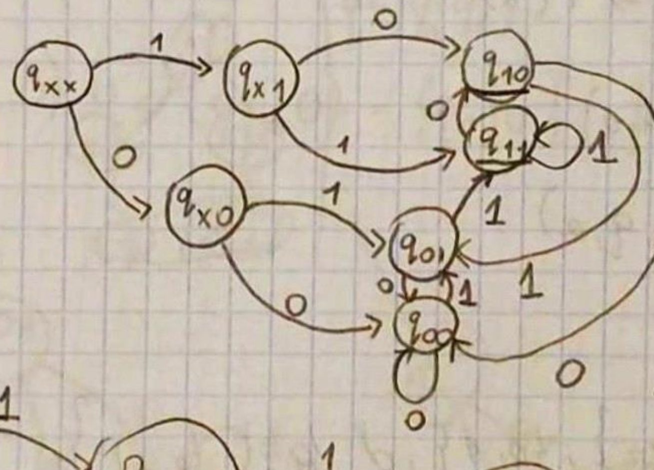
$T = \{0, 1\}$

$P \in L(\alpha) \iff P$ ma 1 na ostatnim miejscu (deterministyczny



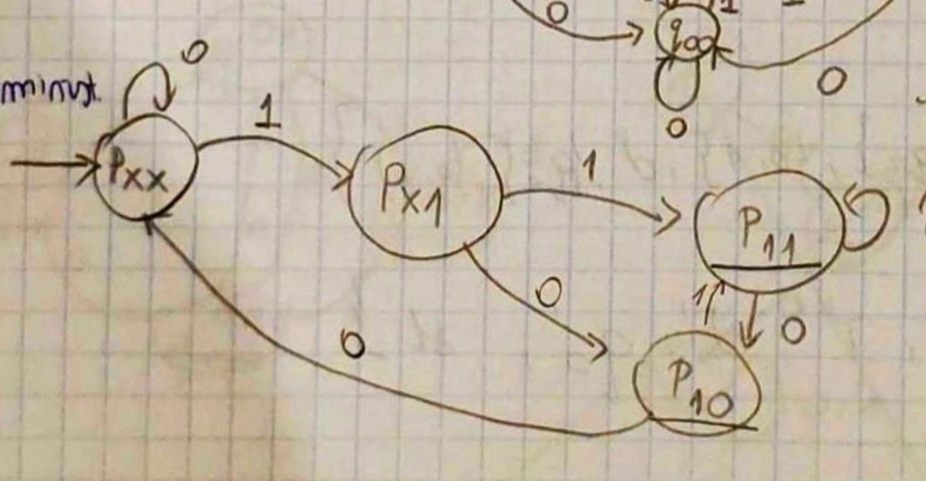
$T = \{0, 1\}$

$P \in L(\alpha) \iff P$ na przedostatnim miejscu (deterministyczn

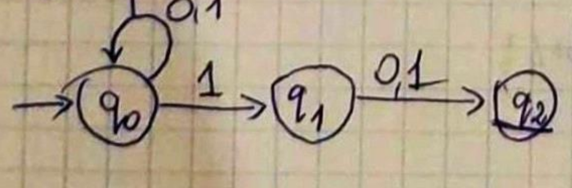


ZA DUŻO STANÓW

Determinist.



Niedeterministyczny



tab

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Uzasadnienie

Mamy: $\alpha = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$

Konstr.: $\alpha' = \langle K', T', \delta', q_0', H' \rangle$

Deterministyczny

$T' = T$

$K' = P(K) = P(\{q_0, q_1, q_2\}) =$

$= \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\} =$

$= \{q^{\emptyset}, q^0, q^1, q^2, q^{01}, q^{02}, q^{12}, q^{012}\}$

$q_0' = Q$

$H' = \{q \in K' : q \cap H\}$

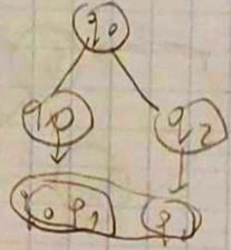
$\delta' = K' \times T' \to K'$

$\delta' : P(K) \times T \to P(K)$

$\delta'(A, a) = \hat{\delta}(A, a) =$

$= \bigcup_{q \in A} \delta(q, a)$

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_2	$\emptyset$	q_2



$\alpha = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\} \rangle$

$\alpha' = \langle K', T', \delta', q_0', H' \rangle$

$q_0' = \{q_0\} = q^0$

$H' = \{q^2, q^{02}, q^{12}, q^{012}\}$

δ'	0	1
$q^{\emptyset}$	$q^{\emptyset}$	$q^{\emptyset}$
q^{0}	q^{0}	q^{01}
q^{1}	q^{2}	q^{2}
q^{2}	$q^{\emptyset}$	$q^{\emptyset}$
q^{01}	q^{02}	q^{012}
q^{02}	q^{0}	q^{01}
q^{12}	q^{2}	q^{2}
q^{012}	q^{02}	q^{012}

$$\delta'(q^{\emptyset}, 0) = \delta'(\emptyset, 0) = $$
$$= \bigcup_{q \in \emptyset} \delta(q, 0) = \emptyset = q^{\emptyset}$$

sprawdzaliśmy w tab.

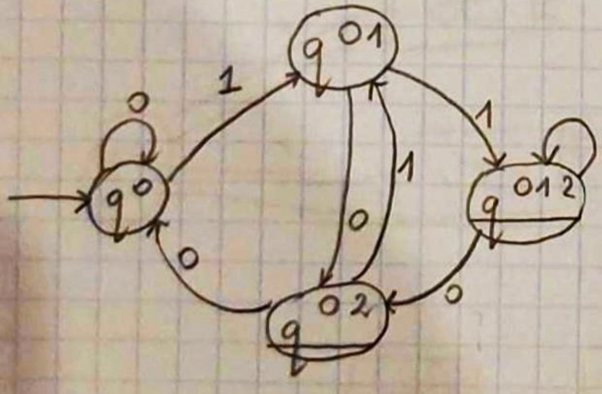
$$\delta'(q^{0}, 0) = \delta'(q_0, 0) = \bigcup_{q \in \{q_0\}} \delta(q_0, 0) = \{q_0\} = q^{0}$$

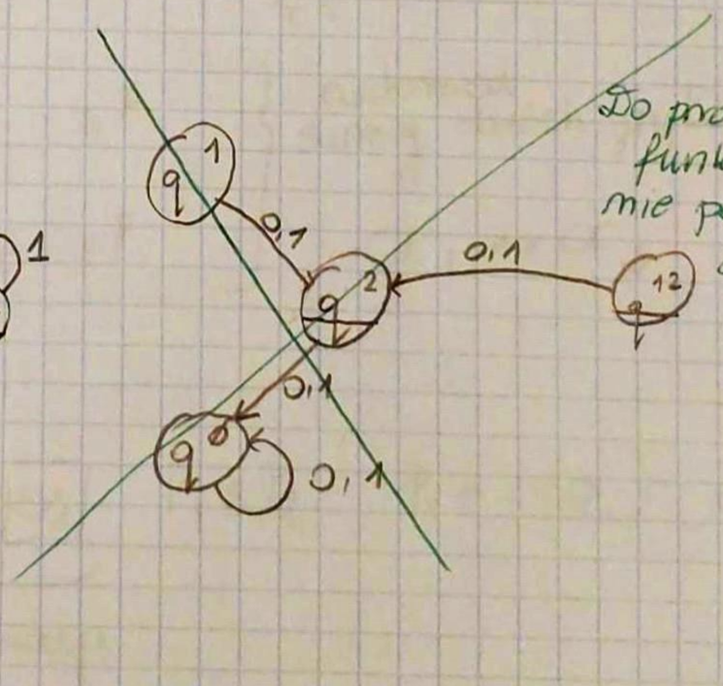
$$\delta'(q^{0}, 1) = \delta'(q_0, 1) = \bigcup_{q \in \{q_0\}} \delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} = q^{01}$$

$\in$ (nie musimy pisać (q_0, q_1))

$$\delta'(q^{01}, 0) = \delta'(\{q_0, q_1\}, 0) = \bigcup_{q \in \{q_0, q_1\}} \delta(\cancel{\{q_0, q_1\}}\ q, 0) =$$

$$= \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\} = q^{02}$$





Do prawidłowego funkcjonowania (akcept.) nie potrzebna jest ta cała część

JF2 - 25|11 - WYKŁAD

$\mathcal{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$

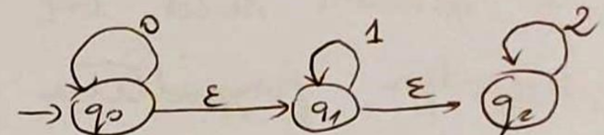
$\delta : K \times T \to P(K)$

$\mathcal{A} = \langle K, T, \delta, \quad , H \rangle$ ε - przejścia

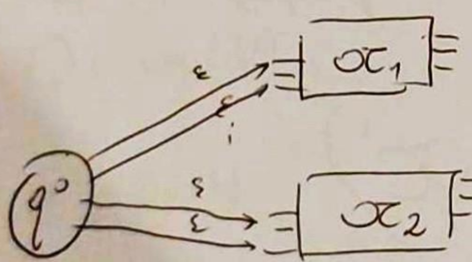
$\delta : K \times T \cup \{\varepsilon\} \to P(K)$

$K = \{q_0, q_1, q_2\}$; $T = \{0, 1, 2\}$ $Q_0 = \{q_0\}$ $H = \{q_2\}$

δ	0	1	2	ε
$\to q_0$	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$



00 ε1 ε 22
000 εε
ε 111 ε
εε



ε P

ε P

automat sumy dwóch języków

$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$

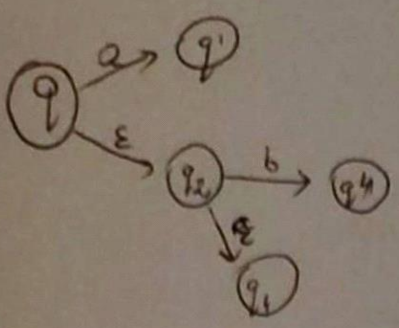
$P \in L(\mathcal{A}_1)$

$P \in L(\mathcal{A}_2)$

$\underbrace{\boxed{\mathcal{A}_1} \varepsilon \boxed{\mathcal{A}_2}}_{\text{KONKATENACJA}}$ $P_1 \varepsilon P_2$ $P_i \in L(\mathcal{A}_i)$ $i = 1, 2$

$L(\mathcal{A}_1) L(\mathcal{A}_2)$

ε-domknięcie st. i zb. stanów



$E(q) = \{q, q_2, q_4\}$

Df

i) $q \in E(q)$

ii) $r \in E(q)$ i $p \in \delta(r, \varepsilon)$, $p \in E(q)$

$A \subset K$

$$E(A) = \bigcup_{q \in A} E(q)$$

Jasne, że automat nied. bez ε-przejść jest szczególnym przypadkiem automatu z ε-przejściami.

$\boxed{\text{TW}}$

Dla każdego (niedeterministycznego) automatu z ε-przejściami $\mathfrak{A}$ można skonstruować deterministyczny automat $\mathfrak{A}'$ (ale już bez ε-przejść) t. że

$$L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}')$$

Konstrukcja

$\mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, Q_0, H \rangle$ $\quad L(\mathfrak{A}) = \{P \in T^* : \hat{\delta}(Q_0, P) \cap H \neq \emptyset\}$

$\mathfrak{A}' = \langle \overline{K}, \overline{T}, \overline{\delta}, \overline{Q_0}, \overline{H} \rangle$

$\overline{K} = K$ $\quad \overline{Q_0} = E(Q_0)$

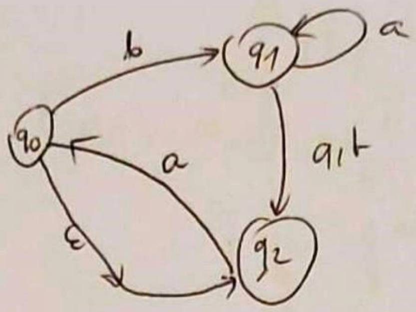
$\overline{T} = T$ $\quad \overline{\delta}(q, a) = E(\delta(q, a))$

$\overline{H} = H$

$\overline{\delta} : \overline{K} \times \overline{T} \to P(\overline{K})$

$\overline{\delta} : K \times T \to P(K)$

δ	a	b	ε
$\rightarrow \boxed{q_0}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$



δ	a	b	c
q_0			
q_1			
q_2			

WYRAŻENIA REGULARNE

V - dowolny alfabet ~~pr~~

Reg(V) - zb. wyrażeń regularnych (najmniejszy zb. napisów zdefiniowanych w następ. sposób)

i) $0 \in Reg(V)$ $\qquad L(e) = \{\varepsilon\}$

$L(0) = \{\phi\}$

ii) $e \in Reg(V)$

iii) dla dowolnego $a \in V$, $a \in Reg(V)$

iv) Jeśli mam już u i v które są już regex nad al. ~~V~~

to $(u+v), \in Reg(V)$ $\qquad ((a+b)(a+b))^*$

$(u . v), \in Reg(V)$ $\qquad (aa, ab, ba, bb)^* \Rightarrow$ ~~nies~~ parzysta ilość

$(u^*), \in Reg(V)$

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$; $L = \{aa, ab, ba, bb\}$

$L^0 = \{\varepsilon\}$

$L^1 = \{aa, ab, ba, bb\}$

$L^2 = \{ \quad \}$

L \ L	aa	ab	ba	bb
aa	aaaa	aaab	aaba	aabb
ab	abaa	abab	abba	abbb
ba	baaa	baab	baba	babb
bb	bbaa	bbab	bbba	bbbb

Język ozn. przez wyrażenie regularne.

$V \subseteq Reg(V)$. Niech $v \in Reg(V)$. Językiem oznaczonym przez wyrażenie v – $L(v)$ – nazywamy zbiór słów zdefiniowany w następujący sposób:

i) Jeśli $v = 0$, to $L(0) = \emptyset$

ii) Jeśli $v = e$, to $L(e) = \{\varepsilon\}$

iii) Jeśli $v = a$, to $L(a) = \{a\}$

iv) Jeśli $L_1 = L(u)$ i $L_2 = L(v)$, to

$$L(u+v) = L_1 \cup L_2 = L(u) \cup L(v)$$

$$L(uv) = L_1 L_2 = L(u)\, L(v)$$

$$L(u^*) = (L_1)^* = (L(u))^*$$

„gwiazdka" domknięcie Kliniego

$L(ab)^* \overset{ii}{=} L(a)L(b^*) \overset{iii}{=}$

$= \{a\}(L(b))^* = \{a\}\{b\}^* =$

$= \{a\}\{\varepsilon, b, b^2, b^3 \ldots\} = \{a, ab, ab^2 \ldots\}$

$\{ab^n : n \geq 0\}$

$L = \{b\}$

$L^0 = \{\varepsilon\}$

$L^1 = \{b\}$

$L^2 = \{b^2\}$

$L^3 = \{b^3\}$

$\vdots$

$\left.\begin{array}{l} \Sigma = \{a, b\} \\ a \; b \end{array}\right\} \Longrightarrow a(a+b)^* b^*$

~~$a+b$~~

---

1) $\Sigma = \{a, b\}$ Odnajdź język w którym, każde słowo zawiera aa i bb $\vdash aa \dashv \; \vdash bb \dashv$

P.D.

2) dł. nie dzieli się przez 3

WYKŁAD - 2|12|2019 $\underline{JF2}$

$$L((a+b)(a+b)) = L(a+b)L(a+b) =$$

$$= (L(a) \cup L(b))(L(a) \cup L(b)) = (\{a\} \cup \{b\})(\{a\} \cup \{b\}) =$$

$$= \{a,b\}\{a,b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$$

$(a+b)^* ab (a+b)^*$ $\quad ab \sqsubset P \in \{a,b\}^*$ $\quad v^+ = vv^*$

$\cancel{\{a+bc\}}$ $(a+bc)^*$

$((a+b)(a+b))^*$ – parzysta ilość

$(a+b)((a+b)(a+b))^*$ – nie p.

$V = \{a,b\}$ $\quad aa \sqsubset P \wedge bb \sqsubset P$

$$(a+b)^* aa (a+b)^* bb (a+b)^* + (a+b)^* bb (a+b)^* aa (a+b)^* =$$

$$= (a+b)^* (aa (a+b)^* bb + bb (a+b)^* aa)(a+b)^*$$

<u>Wyrażenia regularne</u> są równoważne ($\Leftrightarrow$) wtedy gdy one te same języki: $L(u) = L(v)$

$$((a+b)^*)^* = (a+b)^*$$

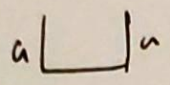
$$(a+e)^* = a^*$$

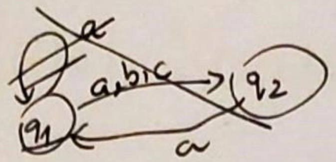
$V = \{a,b,c\}$ nie występują po sobie dwie litery "aa".

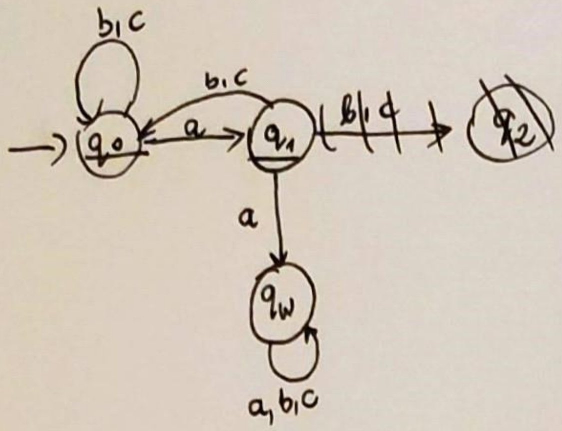
$\cancel{a(b+c)^+ a}$

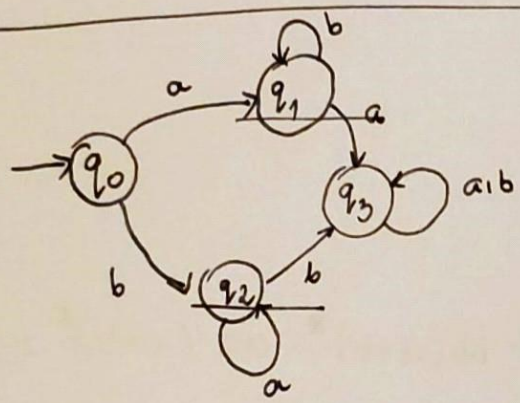
$$(b+c)^* + (b+c)^* (a (b+c)^+)^* a (b+c)^*$$

$\Sigma = \{a, b, c\}$









abbbb

abba – NIE

baaa

$\Downarrow$

$ab^* + ba^*$

<u>Język regularny</u> – językiem L nazywamy językiem regularnym wtedy i tylko wtedy gdy $L = L(r)$

~~wyr.~~ regularne wyrażenie

$\mathcal{L}(FSA)$ $\mathcal{L}(RE)$

$\mathcal{L}(FSA) = \mathcal{L}(RE)$

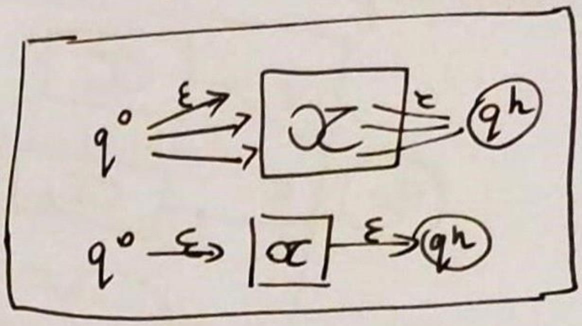
Tw. Kleene'go Dla każdego wyr. reg. $u \in Reg(V)$ można skonstruować automat (det) $\mathcal{A}$ taki, że (D)

tzn. $$L(u) = L(\mathcal{A})$$

i na odwrót

Dla dowolnego automatu skończenie stanowego można skonstr. wyr. reg.

tzn. $$L(\mathcal{A}) = L(u)$$

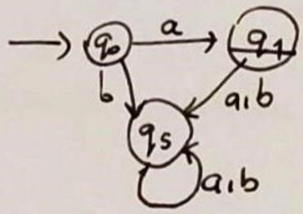


Dowód (D)

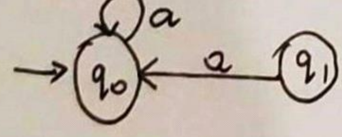
$Reg(V)$

- 0
- e
- $\forall_{a \in V}\ a \in Reg(V)$
- jeżeli $u, v \in Reg(V)$ to $(u+v), (uv), (u^*) \in Reg(V)$

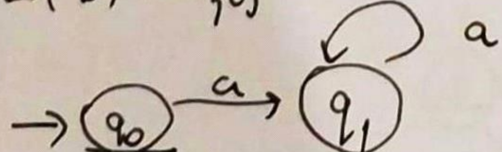
$\forall_{a \in V}\ a \in Reg(V)$



$0 \in Reg(V)$, $L(0) = \emptyset$



$e \in Reg(V)$, $L(e) = \{\varepsilon\}$



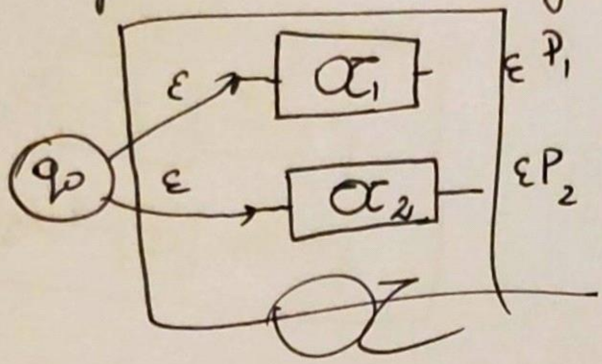
Zakładamy, że dla wyrażenia u istnieje α_1 t. że

$$L(u) = L(\alpha_1)$$

i dla wyrażenia v – || – α_2 t. że

$$L(v) = L(\alpha_2)$$

Konstruuje automat, który zaakceptuje $L(u+v) =$



εP_1, $P_1 \in L(\alpha_1)$ $= L(u) \cup L(v) =$

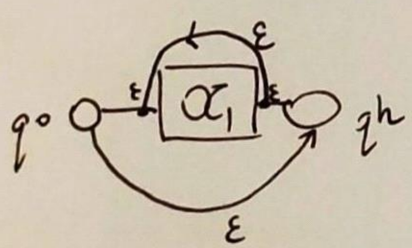
εP_2 $P_2 \in L(\alpha_2)$ $= L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$

$$L(\alpha) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$$

$L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots$

$L(u) = L(\alpha_1)$

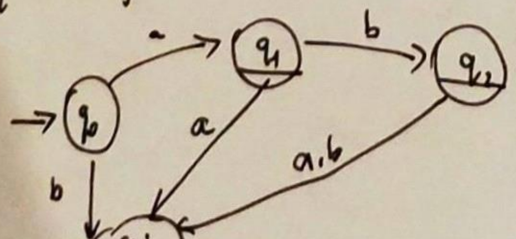
$L(u^*) =$



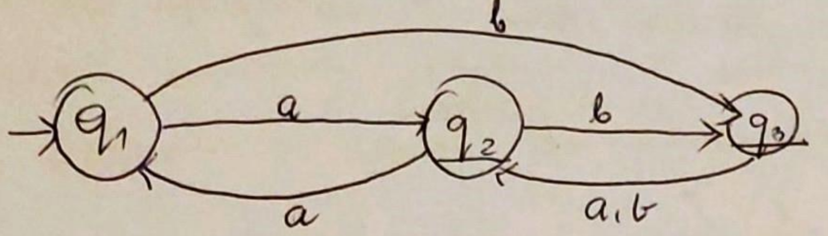
$T = \{a, b\}$

$v = a + ab$

$L(v) = \{a, ab\}$



Wykład 9 9|12



$L(u) = L(\mathcal{A})$ $u = v + w$ t. że

$v = a(aa)^* + a^* b(e + (a+b)a^* b)^* (a+b)(aa)^*$

$w =$ – " – $(e + (a+b)a^* b)$

$u = (a(aa)^* + a^* b(e + (a+b)a^* b)^* [(a+b)(aa)^* + e + (a+b)a^* b]$

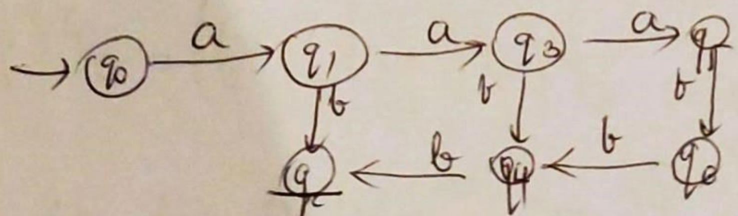
Lemat o pompowaniu dla jęz. regularnych

$L(a^* b^*) = \{a^n b^m : m, n \geq 0\}$
$\cup \!\!\!\!\! \not\;\;$ inkluzja właściwa
$\{a^n b^n : n \geq 0\}$

$L_1 = \{a^n b^n : 1 \leq n \leq 3\}$

$L_1 = L(v) =$ $v = (ab + a^2 b^2 + a^3 b^3)$

$= L(ab) \cup L(a^2 b^2) \cup L(a^3 b^3) = L(a)L(b) \cup L(a)L(a)L(b)L(b) \cup$
$\cup L(a)L(a)L(a)L(b)L(b)L(b) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{a\}\{b\}\{b\} \ldots =$
$= \{ab\} \cup \{a^2 b^2\} \cup \{a^3 b^3\} = \{ab, a^2 b^2, a^3 b^3\}$



Jeśli L jest językiem regularnym to istnieje liczba naturalna k taka, że każde słowo P należącego do L o długości $\geq k$ przedstawić w postaci

$$P = XYZ$$

takich, że

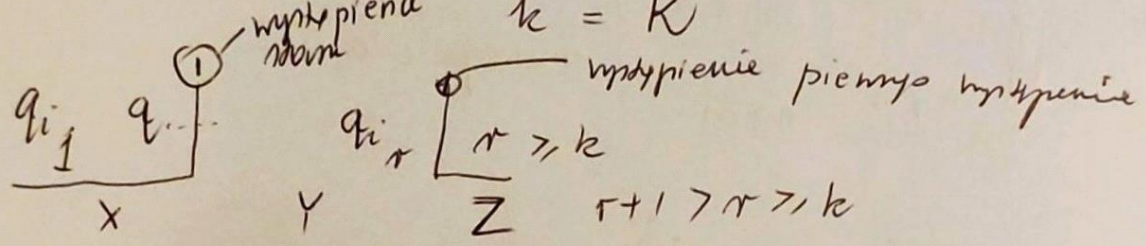
1. $Y \neq \varepsilon$
2. $|XY| \leq k$
3. dla dowolnego $n \geq 0$ słowo $XY^nZ \in L$

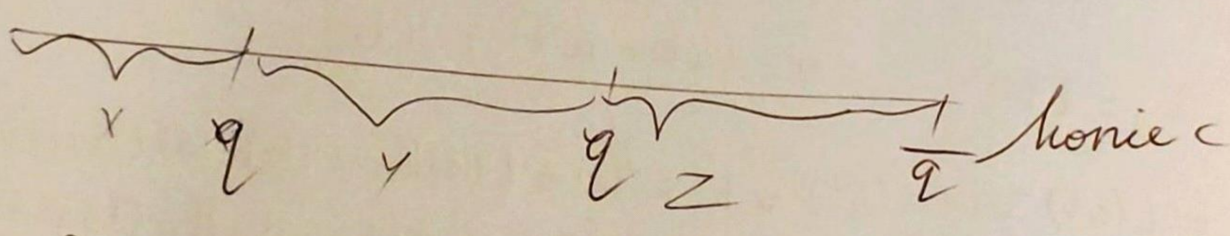
Szkic dowodu:

L – reg

$L = L(\mathfrak{A})$ $\qquad \mathfrak{A} = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$

$k = \overline{\overline{K}}$





$$\hat{\delta}(q_0, X) = q$$

$$\hat{\delta}(q, Y) = q$$

$$\boxed{\hat{\delta}(q, PQ) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, P), Q)}$$

$$\hat{\delta}(q, YY) = q = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, Y), Y) = \hat{\delta}(q, Y) = q$$

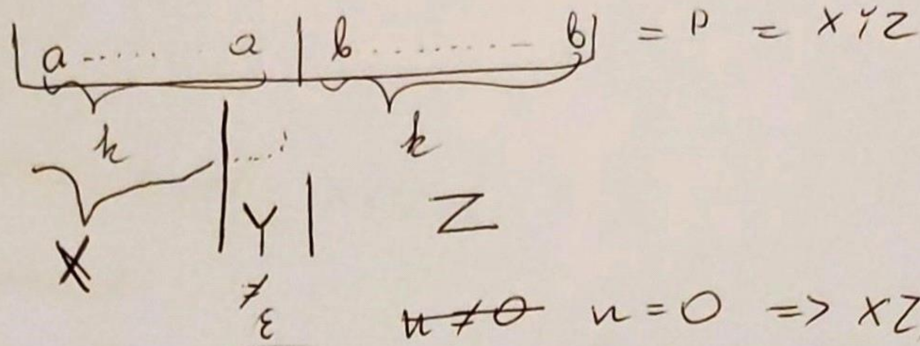
$$\hat{\delta}(q_0, XY^2Z) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, X), Y), Y), Z) = \bar{q} \in H$$

$\{a^n b^n : n \geq 0\}$ Nie jest regularny

~~Zgodnie~~ załóżmy język j.w. jest regularny. Sprawdzamy w oparciu o lemat pompowania

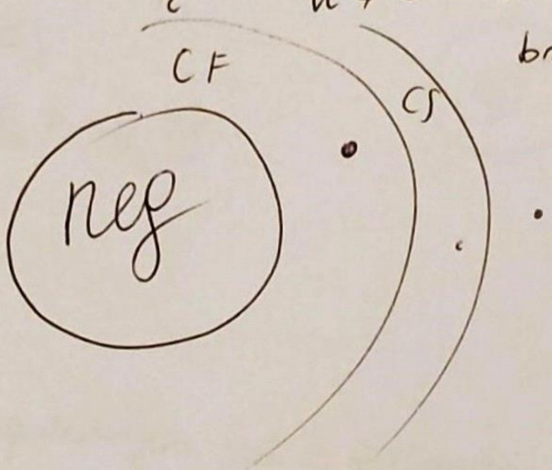
Niech k będzie liczbą z lematu od pompowania

Biorę ~~A~~ $P = a^k b^k$



~~n ≠ 0~~ $n = 0 \Rightarrow XZ \notin L$

brak Y. $XY^0Z \notin L$



Język Bache

L - reg $\quad b \quad V^* | L$

WYKŁAD - JFZ

16/12

Lemat o pompowaniu

L - j. regularny to k $\forall_{P \in L}$ o dł $|P| \geq k$ ← liczba stanów automatu można znaleźć podział słowa P

$$P = XYZ$$

(i) $Y \neq \varepsilon$

(ii) $|XY| \leq k$

(iii) dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ $XY^iZ \in L$.

Nie ma regularności:

* $\{a^n b^n : n \geq 0\}$

* $\{P \in \{a,b\} : \#_a P = \#_b P\}$

context free
bezkontekstowe

Tw. Kleene'go

Wniosek

Klasa języków regularnych jest zamknięta na operacje: sumy, konkatenacji i domknięcia Kleeniego.

L_1, L_2 - regularne

u_1, u_2 - wyrażenie regularne

t.że $L_1 = L_1(u_1)$; $L_2 = L_2(u_2)$

$L_1 \cup L_2 = L_1(u_1) \cup L_2(u_2) = L(u_1 + u_2)$

$L_1 L_2 = L_1(u_1) L(u_2) = L(u_1 u_2)$

$L_1^* = L_1(u_1^*)$

Klasa języków reg. jest zamknięta na operacje dopełnienia. tj. jeśli $L \subset V^*$ jest regularny to $\overline{L} = V^* \setminus L$ jest także językiem regularnym.

$L = L(\alpha)$ det. ← Ten myk zam. akcept na normalne stany.

$\alpha = \langle K, T, \delta, q_0, H \rangle$

$L' = T^* \setminus L(\alpha)$

$\overline{\alpha} = \langle K, T, \delta, q_0, K \setminus H \rangle$

Klasa języków regularnych jest zamknięta na przecięcie (część wspólna)

$$A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$$

$$\text{generow.} \rightarrow \boxed{L} \leftarrow \text{rozpozn.}$$

Gramatyka generująca (generacyjna)

przydawka

↓

przymiotniki   rzeczownik   przysłówek   czasownik

↓

wesoły   element słownika   pies   głośno   szczeka.

Alfabet symboli nieterminalnych – V_N

– " –   –   terminalnych – V_T
(końcowy)

$S \in V_N$ – symbol początkowy

reguły przepisywane gramatyki – F

$G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$

Reguła przepisywania

$\underbrace{\qquad\qquad}_{(V_N \cup V_T)^*}$

(P, Q)

$P \in (V_N \cup V_T)^*$

$Q \in (V_N \cup V_T)^*$

→ poprzedni w P musi występować conajmniej jeden symbol nieterminalny.

$\{ a^n b^n : n \geq 1 \} = \{ ab, a^2b^2, a^3b^3 \ldots \}$

aSa

$$\underbrace{\underbrace{\quad}_{R_1} \underbrace{P}_{R} \underbrace{\quad}_{R_2}} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\quad}_{R_1} Q \underbrace{\quad}_{R_2}}_{R'}$$

I) (S, aSb)

$$\underbrace{a}_{R_1}\underbrace{S}_{R}\underbrace{b}_{R_2} \xRightarrow{I} a(aSb)b \xRightarrow{II} aa\varepsilon bb = aabb = a^2b^2$$

II) (S, ε)

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow a\varepsilon b \Rightarrow ab$

$S \xRightarrow{aSb \Rightarrow} aaSbb \Rightarrow aa\varepsilon bb = a^2b^2$

$G = \langle \{S\}, \{a, b\}, S, \{(S, \varepsilon), (S, aSb)\} \rangle$

$F = \left\{ \begin{array}{l} S \to \varepsilon \\ S \to aSb \end{array} \right\}$ Inny zapis tego samego.

Gramatyki generatywne $G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$

nazywana jest gramatyką regularną (gramatyką typu 3)

wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jej reguły przepisywania

mają jedną z dwóch postaci:

1. $A \longrightarrow P B$, $A, B \in V_N$, $P \in V_T$

2. $A \longrightarrow P$, $A \in V_N$, $P \in V_T$

Przykłady:

a) $G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$

$L(G) = \{ a^n b^m : m, n \geq 0 \}$

$F = \{ S \to aS,\ S \to bA,\ A \to bA,\ A \to \varepsilon \}$

nie możliwe jest wygenerowanie sł. pustego

nadmiarowy bo $S \to A \to \varepsilon$

$F' = \{ S \to aS,\ \cancel{S \to \varepsilon},\ S \to A,\ A \to bA,\ A \to \varepsilon \}$

Chcemy wyprowadzić $a^2 b^3$

$$S \Rightarrow aS \xRightarrow{S \to aS} a(aS) \xRightarrow{S \to aS} aa(bA) \xRightarrow{A \to bA} aa(b(bA)) \xRightarrow{b \to bA} aabbbA \xRightarrow{A \to \varepsilon}$$

$$\Rightarrow aaabbb$$

b) $L(a^*b + b^*a)$

$G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$

terminalny (niezmienny, końcowy)

$F = \{ \; S \to aA \quad A \to aA \quad A \to b$

$S \to bB \quad B \to bB \quad B \to a$

$S \to A \quad \}$

c) $L(a^+b^+c^+)^+$

F- musi być słowiczne.

$G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$

$F = \{ S \to aA,\ A \to aA,\ A \to bB,\ B \to bB,\ B \to cC,\ C \to cC;$

$C \to S,\ C \to \varepsilon \}$

$\{ a^n b^n c^n : n \geq 1 \}$

$F = \{ S \to abc \quad Xc \to Ybcc \quad aY \to aaX \}$

$S \to aXbc \quad bY \to Yb$

$Xb \to bX \quad aY \to aa$

JFZ - wykład

13/01

$G = \langle V_N, V_T, S, F \rangle$ — reguł przepisywania

zmienne ciągowe (V_N)

ciągami o ustalonym znaczeniu (V_T)

(P, Q), $P, Q \in (V_N \cup V_T)^*$

i w P występuje conajmniej jeden terminal

t. 3 $\quad P \to Q$

$A \to PB$, $A, B \in V_N$

$A \to P$, $P \in V_T^*$

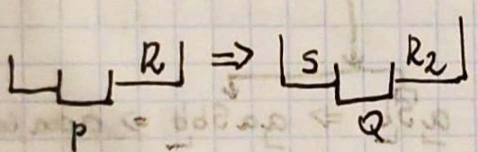
Hierarkia Chomskiego. (języków):

* typów 3, 2, 1, 0

$$Reg = \mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0$$

$a^n b^m \quad a^n b^n \quad a^n b^n c^n$

$a^n b^n$ ⇓ automat ze stosem



$P \to Q$

$R \Rightarrow S \Rightarrow S_1 \Rightarrow \ldots S_n$

$R \xRightarrow{*} S_n \; ; \; R \xRightarrow{*} R$

$$L(G) = \left\{ P \in V_T^* : S \xRightarrow{*} P \right\}$$ def. języka g

gr. typu 2 (bezkontekstowa) to gramatyki o regułach przepisywania następującego kształtu

$A \to P \quad A \in V_N$

$P \in (V_N \cup V_T)^*$

$\underline{a^+b^+}$

$F = \{ S \to aA$
$A \to aA$
$A \to bB$
$B \to bB$
$B \to \varepsilon \}$

$\{S, A, B\}$

$\{a, b\}$

S

$L(G) = \{a^n b^m : \cancel{a+b}\ n,m \geq 1\}$

$\{a^n b^n : n \geq 1\} \to$ Nie, ponieważ lemato pompowaniu.

$V_N = \{S\}$

$V_T = \{a, b\}$

$F = \{\underline{S \to aSb} \quad S \to ab\}$

$S \Rightarrow aSb$

zw. pomiędzy słowami opisanymi →

„budowa wiążącego wnętrza dzięki niej składa" → !

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaabbb = a^3b^3$

$\{a^{2n+3} b^{n+1} : n \geq 1\}$

$S \to a^2Sb$

$\dots \Rightarrow a^{2n}Sb^n \quad , \quad S \to a^5b^2$

$n \geq 0$
$m \geq 0$

$\cancel{(ab)^n cb\, b^{2m} c}$

$S \to abS$

$S \to cbA$

$A \to b^2 A$

$A \to c$

$A \to c^7 B$

$B \to 8B$

$B \to \varepsilon$

$(ab)^n cb\, A$

$\to c$

$\to b^2 A$

$\to c^7 B$

Brak podobnej korelacji co w poprzednim przykładzie.

Gramatyka typu 3 w postaci normalnej to gramatyka w której mają jedną z następującej postaci:

$$\begin{cases} A \to aB & a \in V_T \\ A \to \varepsilon & A, B \in V_N \end{cases}$$

$A \to abcB$.

$$\begin{cases} A \to aC_1 \\ C_1 \to bC_2 \\ C_2 \to cB \end{cases}$$

$A \to abc$ $\qquad A \to \varepsilon$

$A \to aE_1$

$E_1 \to bE_2$

$E_2 \to cE_3$

$E_3 \to \varepsilon$

$A \to B$

$B \to C$

$C \to D$

$D \to aE$

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow aE$ } Reguła łańcuchowa

$A \to aE$

$B \to aE$

$C \to aE$

Dla każdej gr. typu 3 można skonstruować gramatykę typu 3 postaci normalnej. } Tw. o postaci normalnej

$G, P \in V_T^*$

$P \in L(G)$?

procedura

Na ćwiczeniach będzie coś o rozstrzygalności $f(G, P)$

Problem słowa dla gramatyk typu 3.

jest rozstrzygalny dla gramatyk typu 3.

0. $G \to \bar{G}$ (gramatyka postaci normalnej)
1. $P = \varepsilon$
2. $P \neq \varepsilon$ → Załóżmy że ono jest dł. 4

$S \to \varepsilon$

Przejrzeć „F".

* musimy stosować 5 reguł przepisywania

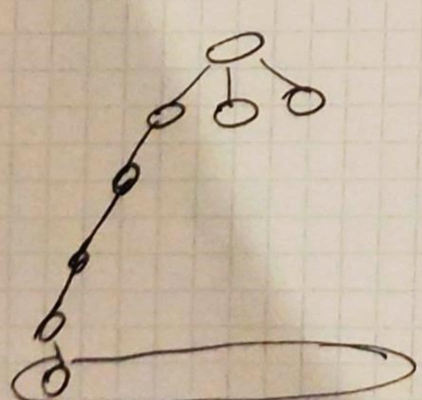
0. Produkujemy wszystkie wyprow. długości jeden

$\exists$

Z następnego produkujemy słowa długości 2, 3, 4...

ale nie optymalny

Na każdym węźle i liści jest skończona (wyliczalna)



Dla każdej gr. typu 3 g można skonstruować automat sk. stanowy A. ~~Języka~~ α

$$L(G) = L(\alpha)$$ i na odwrót

dla każdego aut. sk. st. α można skonstruować gr. typu 3 G tzn

$$L(\alpha) = L(G)$$

Gramatyki bezkontekstowe ($\underline{\text{II}}$ typ) (CF - context free)

gt. 3

$A \to PB \qquad A, B \in V_N$

$A \to P \qquad P \in V_T^*$

p. normalna

$A \to aB \qquad A, B \in V_N$

$A \to \varepsilon \qquad a \in V_T$

gr. t. 2

$A \to P \quad , \quad P \in (V_N \cup V_T)^+$

$a^n b^n c^m d^m \; : n, m \geq 1$

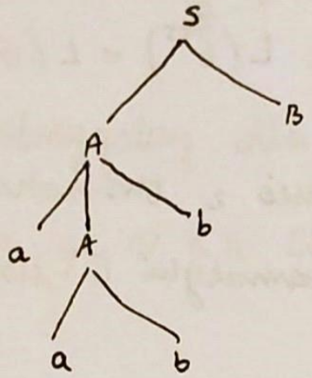
$S \to AB$

$A \to aAb$

$A \to ab$

$B \to cBd$

$B \to cd$



$L(G)$

1. $\varepsilon \notin L(G)$ $\quad \cancel{A \to \varepsilon}$

2. $\varepsilon \in L(G)$ $\quad S' \to \varepsilon$

$\cancel{A \to \ldots S' \ldots}$

TW. Dla każdej gramatyki G możemy skonstruować jej w zakresie generowanego języka gramatykę G' t.że prawe strony reguł przepisywania gramatyki G' są wszystkie różne od ε, za wyjątkiem gdy $\varepsilon \in L(G)$, ale wówczas

i) jedyną regułą z ε po prawej stronie jest reguła

$S' \to \varepsilon \in F'$

oraz

ii) symbol S' nie występuje po prawej stronie jakichkolwiek innych reguł przepisywania z F!

Wniosek

Problem należenia słowa pustego do gr. bezkontekstowej jest rozstrzygalny.

Uzasadnienie

$\varepsilon \in L(G)$

$G \rightsquigarrow G'$

Jeśli $F' \ni S' \to \varepsilon$ to TAK należy do $L(G)$

$F' \not\ni S' \to \varepsilon$ to NIE należy do $L(G)$

Wniosek

Dla każdej gr. CF możemy skonstruować gramatykę $\overline{G}^{*}$ w której żadna reguła przepisywania nie ma prawej strony równej ε i taką, że $L(\overline{G}^{*}) = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$

$\overline{G}$: 1. $G \rightsquigarrow G'$ zgodnie z twierdzeniem

2. Ze zbioru F' gramatyki G' usunąć regułę $S' \to \varepsilon$

Gramatykę nazywamy gr. ε wolną, jeśli żadna jej regule przepisywania nie ma prawej strony równej ε.

Postać normalna (gr. t. 2) (p.n. Chomskiego)

Jeśli wszystkie reguły jej przepisywania mają postać:

$A \to BC$ $\quad A, B, C \in V_N$

$A \to a$ $\quad a \in V_T$

TW. (o. p. n. Chomskiego)

Dla każdej ε-wolnej CF gramatyki G można skonstruować CF gramatykę G' w p. n. Chomskiego i takie, że:

$$L(G) = L(G')$$

$A \to aBCd$

1. $a \rightsquigarrow A_a$
2. $A \to A_a BC A_d$
3. $A_a \to a$
   $A_d \to d$
4. $A \to BCDE$

$$\begin{cases} A \to BX \\ X \to CZ \\ Z \to DE \end{cases}$$

Problem słowa jest rozstrzygalny dla CF gramatyk.

G przekształcam do gr. w p. n. Chomskiego

$p = a_1 \dots a_n$

$|p| = n$ to dł. wyprowadzenia sł. P w gramatyce w p. n. Chomskiego wynosi $2|P| - 1$

dł. 1 $\quad |F|' = \overline{F}' = K$

dł. 2 $\quad K^2$

⋮

dł $2|P|-1 \quad K^{2|P|-1}$

Algorytm CYK

Cocke

Younga

Kasami

$\{(G,P)$ G jest CF gr. w. p.n. Ch. $\} = \mathrm{II}$

$\mathbb{P} = \{(G,P) : P \in L(G)\}$

Pomysł: przez P_{ij} oznaczamy podsłowa słowa $P = a_1 \dots a_n$ rozpoczynające się na i-tej pozycji o długości j

$P = a_1 \dots a_{10}$

$P_{34} = \underbrace{\boxed{a_3} a_4 a_5 a_6}_{4}$

$P = P_{1n}$

Dla każdej pary i oraz j znajdować będzie zbiór V_{ij} tzw. takich symboli nieterminalnych X, że

$$X \xRightarrow{*} P_{ij}$$

Jeśli $V_{1n} \ni S$, to $P \in L(G)$

alternatywne prawe strony

$S \to AB \mid BA \mid SS \mid AC \mid BD$

$C \to SB$

$D \to SA$

$A \to a$

$B \to b$

$P = aabbab$ $n = 6$

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$

$V_{ij} = \{X \in V_N : X \to P_{ij}\}$

$V_N = \{S, A, B, C, D\}$

j						
6	S					
5	D	C				
4	S	S	$\emptyset$			
3	$\emptyset$	C	$\emptyset$	C		
2	$\emptyset$	S	$\emptyset$	S	S	
1	A	A	B	B	A	B
	1	2	3	4	5	6

V_{61}

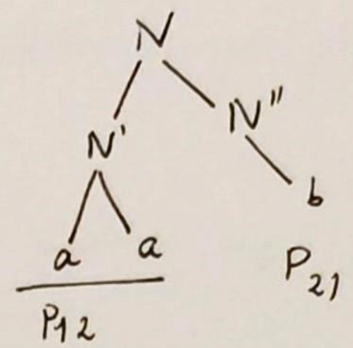
i (początek na pozycji)

a a b b a b

V_{12} $\{X : X \Rightarrow aa\}$

V_{22} $\{X : X \rightarrow ab\}$

$\begin{matrix} A & A \\ \downarrow & \downarrow \\ a & a \end{matrix}$



$V_{13} = \{X : X \overset{*}{\Rightarrow} aab\}$

V_{23} $\{X : X \overset{*}{\Rightarrow} abb\}$

~~a bb~~   ab b

~~V_{21} V_{32}~~ V_{22} V_{41}

~~A $\emptyset$~~ $C \to SB$

V_{33} (bba)

bb a

V_{32} V_{11}

~~$\emptyset$~~

$\boxed{\begin{matrix} V_{43} & (BAB) \\ B & AB \\ V_{41} & V_{52} \\ B & S \\ C \to SB & \end{matrix}}$

V_{43} (BAB)

B AB

V_{41}

for $i = 1$ to n do   reg. pocz.

$V_{i1} = \{Y : Y \to a_i \in F\}$

end

for $j = 2$ to n do   dł. podsłów

for $i = 1$ to $n - j + 1$ do   pocz. słów

begin

$V_{ij} = \emptyset$

for $k = 1$ to $j - 1$ do   miejsca podziału.

$V_{ij} = V_{ij} \cup \{A : A \to BC \in F$

$B \in V_{ik}, C \in V_{i+k, j-k}$

end end   end   end

Wykład JFZ

27.01.

(15-20) zadań

1. Który akcept. przez niedet. sk. st. z ε przejś.

a) należy te języki, które słowo puste (ε) N

b) należą wszystkie języki nist nad alf. {abc} N ?

! (c) należy język z {ε} T

2 Różnica mnogościowa dwóch niesk. języków.

1) nie musi być język reg. N

(1p) 2) zawsze oznaczona jest przez wyraż. reg. T

3) Zawsze zawiera sł. puste N

3. W oparciu o lemat o pompowaniu dla j. reg.

– 1) język $\{a^n b^m$; $n, m \geq 1\}$ jest reg. ~~T~~ N

– 2) $\forall$ języka reg. L u dzielnie język L^n $n \geq 0$ jest reg ~~T~~ N

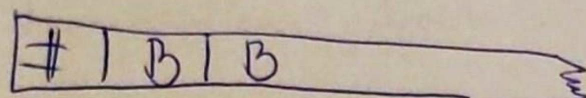
3) ~~an b~~ $\{a^n b^n$ $n \geq 1\}$ ~~N~~ T

1

(Def) Deterministyczna maszyna Turinga (m.T)

$\mathcal{M} = \langle K, \Sigma, \delta, q_0, H \rangle$ $\quad \Sigma = \Sigma_T \cup \Sigma_N$

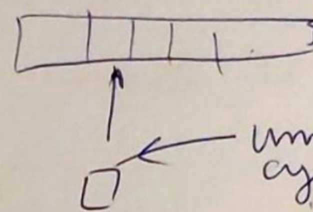
K – zb. stanów; δ – f. przejścia; q_0 – start; H – zb. st. końc.



$\# \in \Sigma_N$

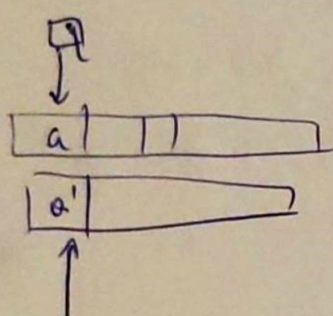
$B \in \Sigma_N$

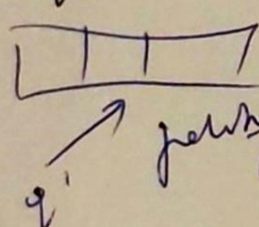
$\delta : K \times \Sigma \to K \times \Sigma \times \{L, R\}$



umie czytać i pisać w maszynie Turinga

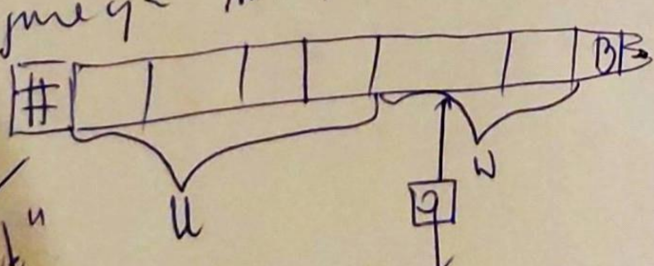
$q\,a\,q'\,a'\,M$ $\quad M \in \{L, R\}$





jeżeli możemy pójść w prawo.

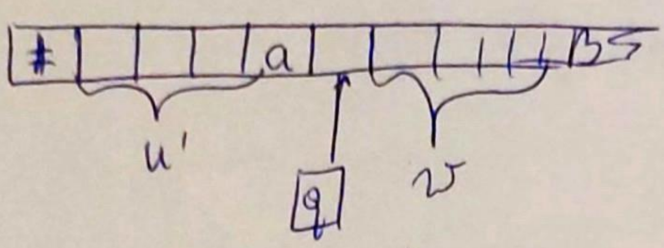
Konfiguracja m.T.:



Koncentrujemy na tym gdzie się kończy słowo w i następnie do B (BLANK)

uqw

symbol „strażnik" głowica w lewo ale żeby nie spadła



$u' a q b w'$

Będzie się zmieniać wtedy gdy (L, R) w zależności ~~kied~~ gdzie będzie patrzyć

ruchem:

$q b q' b' L$ $\quad u' q' a b' v'$

$q' b q' b' R$ $\quad u' a b' q' w'$

konf. końcowa to taka kiedy maszyna osiąga z dwóch stanów:

$q_h \longrightarrow$ konf. akceptująca (halting)

$q_r \longrightarrow$ konf. odrzucająca (rejecting)

$q_h \wedge q_r$ jako st. końcowe nie występują po lewej stronie ruchów

$$\delta : K \times \Sigma \setminus \{q_h, q_r\} \to K \times \Sigma \times \{L, R\}$$

M akceptuje słowo $w \in \Sigma_T^*$ jeśli $\exists$ ciąg konf. $q_1 .. q_k$ t. że:

- $\# q_0 w$ jest konf. początkową dla st. w
- c_k jest konf akceptującą dla M (tzn. q_h jest stanem w c_k)
- dla wszystkich konf. : $c_1 \dots c_k$ konf. ~~$c_1 + 1$~~ c_{i+1} powst. z konf. c_i, $i \in [1, k-1]$

Język akcept. przez m. T

$L(M) = \{ w \in \Sigma_T^* ; w$ jest akcept. przez $M)$

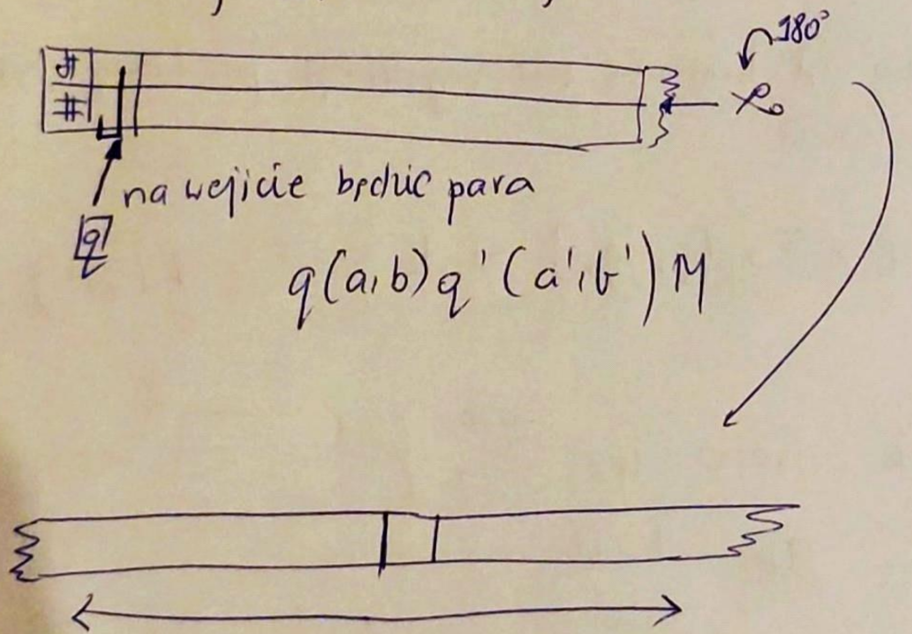
$$\exists A \, \forall_i \; A(i)\downarrow$$

$$A(i) = \begin{cases} 1 & ; \; i \in P \\ 0 & ; \; i \in \Pi \setminus P \end{cases}$$

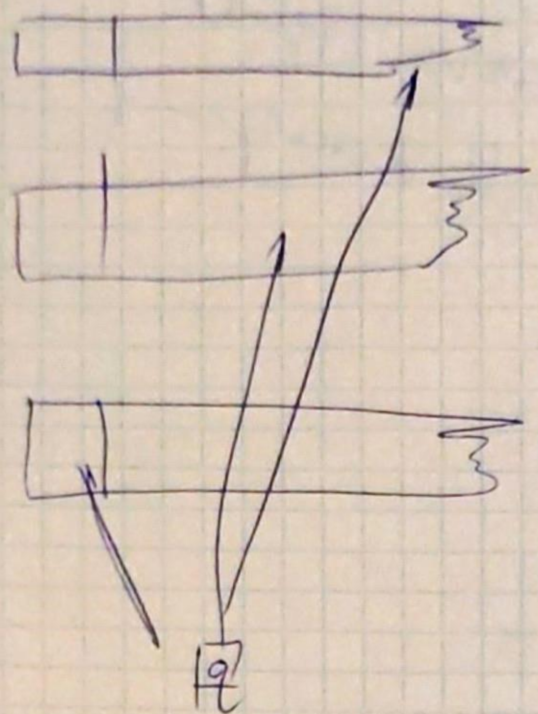
Jeśli m. T zatrzymuje się dla każdego wejścia (tzn. dla każdej konf. początkowej $\#q_0w$) w jednym stanie q_h lub q_r nazywamy maszynę rozstrzygającą $L(M)$ a sam język nazywamy rozstrzygalnym przez tę maszynę.

Warianty maszyny T:

* z taśmy dwu taśmowy



* „O trzech taśmach"



m. skończone st. z deterministycznej jedną procedurą deterministyczną

Można zmieniać modele i kod do wielomianowy

konstrukcja potęgowa ($P \overset{?}{=} NP$)

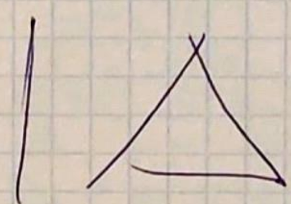
$q\, a_1 a_2 a_3\, q'\, a_1'\, a_2'\, a_3'\, M_1 M_2 M_3$

wielomianowych maszynach Turinga determinist (P) u niedeter dla (NP)

Model maszyny niedeterministycznej M.T.

$\delta(q,a) = q'$

$qa \begin{cases} q'\, a'\, M' \\ q''\, a''\, M'' \end{cases}$



drzewo akceptacji

Dla każdej jednościeżkowej m $T(m)$ na wejściu dł n w liczbie kroków $t(n)$ krokach istnieje równoważna jej maszyna m' jednotaśmowa i deterministyczna działająca w czasie

$$2^{O(t(n))}$$