Prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak

ANALIZA MATEMATYCZNA
2018/2019

(1) Podstawy i liczby:
  - zbiory i operacje na nich,
  - odwzorowania między zbiorami, odwzorowania i działania na zbiorach, iniekcja, suriekcja, bijekcja, złożenie odwzorowań,
  - moc zbioru,
  - liczby naturalne, całkowite, wymierne,
  - aksjomatyka liczb rzeczywistych,
  - indukcja,
  - punkt skupienia, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa,
  - arytmetyka zmiennoprzecinkowa,
  - lemat Ascoliego, twierdzenie Heinego-Borela.
  - wartość bezwzględna.

(2) Ciągi liczb rzeczywistych:
  - granica ciągu zbieżnego, operacje algebraiczne,
  - ciągi $\frac{1}{n^p}, p > 0$, $p^{\frac{1}{n}}, p > 0$, $n^{\frac{1}{n}}$, $x^n, |x| < 1$,
  - ciągi monotoniczne,
  - ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$,
  - twierdzenie o trzech ciągach
  - podciągi,
  - punkty skupienia ciągu,
  - ciągi Cauchy'ego, ciąg $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$,
  - granica górna, granica dolna.

(3) Szeregi:
  - zbieżność szeregu,
  - warunek Cauchy'ego,
  - szereg geometryczny,
  - szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,
  - operacje algebraiczne na szeregach zbieżnych,
  - kryteirum porównawcze,
  - szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p > 0$,
  - kryterium Cauchy'ego, kryterium d'Alemberta,
  - szeregi o wyrazach dowolnych, kryterium Dirichleta, kryterium Abela, kryterium Leibniza, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$,
  - zbieżność bezwzględna, warunkowa, twierdzenie Riemanna,
  - szereg $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
  - iloczyn Cauchy'ego, twierdzenie Mertensa.

(4) Funkcje rzeczywiste:
  - definicja granicy Cauchy'ego, Heinego,
  - twierdzenie o trzech granicach,
  - granice i operacje algebraiczne,
  - granica $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
  - granica $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$,
  - ciągłość, przykłady,
  - granice lewo- i prawostronne,

  - twierdzenie Darboux, twierdzenia Weierstrassa,
  - jednostajna ciągłość,
  - twierdzenie Cantora,
  - funkcje monotoniczne, funkcje odwrotne $x^{\frac{1}{n}}$, $\arcsin$, $\arccos$, arctg, $\log_a x$.

(5) Pochodna:
  - definicja pochodnej,
  - interpretacja geometryczna pochodnej,
  - funkcje różniczkowalne,
  - ekstrema, twierdzenia Fermata, warunek wystarczający ekstremum, funkcje rosnące, malejące,
  - twierdzenie Rolla, twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej,
  - wzór Taylora,
  - funkcje wklęsłe i wypukłe.

(6) Całki:
  - funkcja pierwotna,
  - całka Riemanna i jej własności,
  - całkowanie przez części i przez podstawienie,
  - wzór Newtona-Leibniza,
  - zastosowania całki Riemanna, funkcja logarytmiczna, funkcja wykładnicza.

(7) Ciągi funkcji:
  - zbieżność punktowa i jednostajna,
  - zbieżność i operacje analizy,
  - szeregi potęgowe, twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda,
  - funkcje trygonometryczne.

Analiza matematyczna 15 – 8/10

Michał Jasinak
B2-47

wt 12-13
cz. 10-11

mjk@amu.edu.pl

Warunki zaliczenia

→ ćwiczenia
(25pkt x2 – kolokwia
10 pkt – pr. domowa
10 pkt – aktywność
70pkt – maximum => aby zaliczyć ćwiczenia trzeba mieć 20pkt

→ egzamin (wykład)
* dowody (nie są wymagane!)
* ogólna wiedza
* zrozumieć idee
* Forma testowa
* PRZEPIS

Podstawowym pojęciem matematyki jest zbiór.
Zbiór – mówimy, że a należy do zbioru A, jeżeli a jest elementem A.

Przez $\emptyset$ oznaczamy zbiór, który nie zawiera żadnego elementu, nazywamy go zbiorem pustym.

Zbiór składających się z elementów $a_1 \dots a_n$ oznaczamy jako $\{a_1 \dots a_n\}$. W szczególnym przypadku $\{a\}$ taki zapis oznaczamy zbiór, którego jedynym elementem a. Piszemy $A = \{x : w(x)\}$ dla oznaczenia tych wszystkich x, które mają własność $w(x)$

Jeżeli dowolny element A jest elementem zbioru B to mówimy że A zawiera się w B ($A \subseteq B$). Jeżeli zbiór B zawiera się w A ($B \subseteq A$) to zbiory A i B są sobie równe ($A = B$). Jeżeli $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq C$ to $A \subseteq C$ (przechodniość).

Niech T będzie zb. oraz dla każdego $t \in T$ niech A_t, takie będzie zbiorem są tych zbiorów | rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$; $S = \bigcup_{t \in T} A_t$, nazywamy zbiór tych elementów x takich, że $x \in A_t$ dla pewnego $t \in T$.

Jeżeli $T = \{1 \dots n\}$ to piszemy $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 .. \cup A_n$

Przekrój (część wspólna) rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$ $P = \bigcap_{t\in T} A_t$, to zbiór tych wszystkich elementów x, które należą do każdego zb. A_t.

Podobnie jeżeli $T = \{1 \dots n\}$ to $P = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n$

Zachodzą następujące własności:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A$$
$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Różnica zb. A, B oznaczony A i B, to zbiór tych wszystkich elementów x, które należą do A i nie należą do B

Jeżeli $A \subset X$, to dopełnienie zbioru A w X, A^c to $X \setminus A$

Twierdzenie (de Morgana)

Dla dowolnej rodziny zbioru $(A_t : t \in T)$ zawartych w

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcap_{t\in T} A_t^{\,c}$$

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t\in T} A_t^{\,c}$$

Iloczynem (produktem) kartezjańskim zbiorów A i B, oznaczany $A \times B$, nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych

$$A \times B = \{(a,b) \; ; \; a \in A, \; b \in B\}$$

Relacją między elementami zbioru A i elementami B nazywamy dowolny podzbiór $R \subset A \times B$.

Przykładem relacji w zbiorze l. naturalnych $\mathbb{N}$ jest $\leq$ wówczas $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \leq b\}$

Jeżeli X oraz Y są zbiorami to funkcja ze zbioru X do zbioru Y nazywamy dowolne przyporządkowanie, każdemu elementowi zbioru X jednego elementu zbioru Y.

Piszemy $f: X \longrightarrow Y$, $X \xrightarrow{f} Y$. Zbiór X to dziedzina funkcji f, jego elementami są argumenty.

zbiór Y to przeciwdziedzina, jego elementy to wartości funkcji.

Piszemy $y = f(x)$, jeżeli Y jest el. przyporządkowanym x przez f

Funkcja to trójka (X, f, Y)

Jeżeli $f: X \rightarrow Y$ oraz $A \subseteq X$, to $f|_A$ to funkcja f obcięta do zbioru A, to znaczy jej dziedziną są tylko elementy zb. A, czyli opisuje ją trójka $(A, f|A, Y)$

Obrazem zbioru $A \subseteq X$ przez odwzorowanie (funkcję) f nazywamy zbiór f ~~do~~ od A $f(A) = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\}$

Przeciwobrazem $B \subseteq Y$, to przeciwobraz zbioru B przez f nazywamy zbiór $f^{-1}(B) = \{x \in B : f(x) \in B\}$

TW. A, A_1, A_2, A_s $s \in S$ będą zb. w X $f: X \longrightarrow Y$

wówczas

- $A_1 \subseteq A_2$, to $f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $A(\bigcup_{s \in S} A_s) = \bigcup_{s \in S} f(A_s)$
- $A(\bigcap_{s \in S} A_s) \subset \bigcap_{s \in S} f(A_s)$
- $A(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$

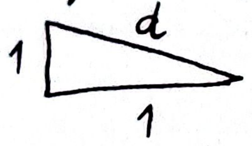
Będziemy mówić, że zbiory M oraz N mają taką samą <u>„moc"</u> (mają tyle samo elementów), jeżeli istnieje bijekcja z M na N

$\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q}$ będą miały tą samą moc ⇒ TW. Cantora.

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{2}{1} \arrow[dl] & \frac{3}{1} \arrow[r] & {} \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} & \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & \frac{2}{3} & \dots &
\end{tikzcd}$$

<u>TW. CANTORA</u>

- Przekątna kwadratu o boku dł. 1 ma długość d, która spełnia warunek $d^2 = 2$ (tw. pitagorasa)
obserwacja $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Załóżmy, że $\sqrt{2} = \frac{k}{n}$ a $\frac{k}{n}$ to jego postać nieskracalna

$k = \sqrt{2}n$

$k = 2l$

$2l = \sqrt{2}n \,|^2$

$4l^2 = 2n^2$ ⇒ parzystość ⇒ wymierne

Tw. B_1, B_2, B_t ; $t \in T \subset X$ $f: X \longrightarrow Y$ to

- $B_1 \overset{\subseteq}{\&} B_2$ to $f(B_1 \subseteq f^{-1}(B))$
- $f^{-1}(\bigcup_{t \in T} B_t) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(B_t)$
- $f^{-1}(\bigcap_{t \in T} B_t) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(B_t)$
- $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Funkcje $f: X \to Y$ nazywamy iniekcją jeżeli $x_1 \neq x_2$ to $f(x_1) \neq f(x_2)$ → różnowartościowa

Surriekcje, jeżeli $f(x) = y$ → „na"

Funkcja, która jest różnowartościowa + na ⇒ ~~surri~~ bijekcja

Jeżeli $f: X \to Y$ oraz $g: Y \to Z$ to możemy zdefiniować złożenie funkcji f z g przyjmuje, że $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Zakładamy, że znamy pojęcie liczb naturalnych ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{1 \dots n\}$ → liczby naturalne
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1 \dots n\}$ → -"- dodatkowe 0
$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ → liczby całkowite
$\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} ; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ → liczby wymierne

$\frac{k}{n} = \frac{m}{l} \iff kl = nm$

Liczby całkowite k możemy przyporządkować liczbę wymierną $\frac{k}{1}$.

Zatem $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

- Analysis for Computer Scientists, Methods and Algorythms - M. Oberguggember, A. Ostermann Springer 2011.
- „Analiza matematyczna I" - A. Sołtysiak UAM 2000
- „Podstawy Analizy mat. - W. Rudin PWN 1996

WYKŁAD 2
15/10

Definiujemy zb. liczb rzeczywistych w sposób aksjomatyczny

Def Zbiór $\mathbb{R}$ zawierający przynajmniej dwa elementy nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych. Jego elementami liczbamy rzeczywistymi jeżeli spełnione są następujące własności:

(I) Aksjomaty dodawania

Istnieje odwzorowanie $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyporządkujące każdej parze liczb rzeczywistych (x, y) liczbę $x+y$ zwaną sumą x i y spełniające następujące warunki:

1) $x+y = y+x$ (przemienność)
2) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (łączność)
3) istnieje w $\mathbb{R}$ element oznaczany „0" taki, że dla każdej liczby rzeczywistej x; $x+0=x$
4) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje $y \in \mathbb{R}$ taki że $x+y=0$

(II) Aksjomaty mnożenia

Istnieje odwzorowanie $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyporządkowujące każdej parze liczb rzeczywistych (x, y), liczbę $x \cdot y$ zwaną iloczynem liczb x i y spełniającą następujące warunki

1) $xy = yx$ (przemienność)
2) $(xy)z = x(yz)$ (łączność)
3) Istnieje el. neutralny oznaczany „1" taki, że dla każdego $x \neq 0$ $x \cdot 1 = x$
4) dla każdego $x \neq 0$ istnieje $y \in \mathbb{R}$ taki, że $x \cdot y = 1$

rozdzielność mnożenia wzg. dodawania → 5) $x(y+z) = xy + xz$, $x, y, z \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ jest więc ciałem

(III) Aksjomaty porządku

Istnieje w $\mathbb{R}$ relacja oznaczana $\leq$ (jeżeli $x \leq y$, to mówimy że x jest mniejszy lub równy y) spełniająca warunki

1) $x \leq x$ (zwrotna)
2) $x \leq y$, $y \leq z$ to $x \leq z$ (przechodniość)
3) $x \leq y$, $y \leq x$ to $x = y$
4) $x \leq y$ lub $y \leq x$
5) Jeżeli $x \leq y$ to wówczas $x+z \leq y+z$
6) $0 \leq x$, $0 \leq y$; to wówczas $xy \geq 0$
$0 \leq xy$

Jeżeli $x \leq y$ to piszemy także $y \geq x$

Warunki III. 1 – III. 3 oznaczają $\mathbb{R}$ jest uporządkowane w sposób liniowy.

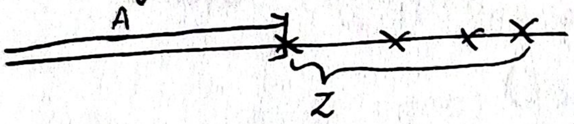
Zauważmy, że te wszystkie warunki spełnione są przez $\mathbb{Q}$

Powiedzmy, że $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczone z góry, jeżeli istnieje $z \in R$ taka, że $x \leq z$ dla każdego $x \in A$

Załóżmy, że z_0 jest ograniczeniem górnym zbioru A. Powiedzmy że, z_0 jest kresem górnym lub supremum zb. A, jeżeli $x \leq z$ dla $x \in A$ mamy $z_0 \leq z$ dla dowolnego $z \in R$ takiego, że

(IV) $\mathbb{R}$ jest zupełne w sensie Dedekinda.

Każdy niepusty $S \subseteq \mathbb{R}$ ograniczony z góry ma kres górny.



$$\forall_{x \in A} \; z \geq x \Rightarrow z \geq z_0$$

$A = \{1 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow 1$ jest ograniczeniem górnym

Dla każdego liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy $n \in \mathbb{N}$ taką, że

$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. To znaczy, że $1 - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym.

Można pokazać, że zbiór o powyższych własnościach istnieje i w pewien sposób jest jedyny.

Def Niepusty podzbiór $X \subseteq R$ nazywamy zbiorem indukcyjnym, jeżeli z faktu, że $x \in X$ wynika, że $x+1 \in X$.

Def Zbiór liczb naturalnych to najmniejszy podzbiór indukcyjny zawierający 1.

Tw. (zasada indukcji)

Jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz

$1°$ $1 \in A$

$2°$ $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$, to

$3°$ $A = \mathbb{N}$

Niepusty podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazywa się ograniczeniem z dołu, jeżeli istnieje $z \in \mathbb{R}$ taki, że $z \leq x$ dla $x \in A$.

Ograniczenie dolne z_0 jest kresem dolnym zbioru A, jeżeli ~~ogran~~ dla dowolnego ograraniczenia dolnego zbioru A oznaczonego z mamy $z \leq z_0$. Innymi słowy, kres dolny to największe ograniczenie dolne

$$A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$$

Tw. (zasada Archimedesa)

Jeżeli $x > 0$ oraz $y \in \mathbb{R}$ to istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że

$$(n-1)x \leq y < nx$$

Tw. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b $a < b$ istnieje liczba wymierna $r \in \mathbb{Q}$ $a < r < b$.

Mówimy, że $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Dla liczby rzeczywistej x definiujemy wartość bezwzględną

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

($a < b$, jeżeli $a \leqslant b$, $a \neq b$) Mamy $-|x| \leqslant x \ |x|$

Tw.
Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ to
(I) $|x+y| = |x| + |y|$
(II) $|xy| = |x||y|$

Geometrycznie $\mathbb{R}$ można wyobrażać sobie jako prostą
w $\mathbb{R}$ możemy określić odległość / metrykę. Mianowicie

$$d(x,y) = |x-y|$$

Tak określona funkcja ma następujące własności:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leqslant d\ (x,y) + d(z,y)$

Lemat (Ascoli)

Jeżeli $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ ciąg domkniętych przedziałów w $\mathbb{R}$

↳ $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b]$

$[[[\cdot]]]$

to istnieje $c \in \mathbb{R}$ taki, że

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Def Rodzina $S = \{X_t : t \in T\}$ jest pokryciem zbioru Y, jeżeli $Y \subset \bigcup_{t \in T} X_t$.

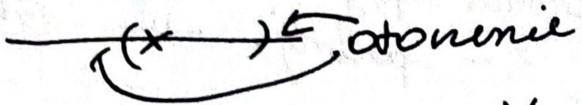
TW. (Heine- Borel)

Z dowolnego pokrycia skończonego przedziału domknięt~~ymi~~ego przedziałami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone.

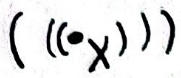
Przedział otwarty

$(a,b) = \{x \in R , a < x < b\}$

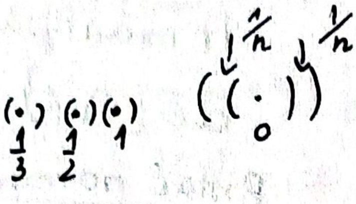
Def otoczeniem punktu $x \in R$ nazywamy dowolny przedział otwarty zawierający x



Def Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru $X \subset R$ jeśli dowolne otoczenie x zawiera punkt z X różny od x.



$A = \{ \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N}\}$



TW. (Bolzano - Weierstrassa)

Ograniczony zbiór nieskończony w R ma punkt skupienia. (w $\mathbb{R}$)

Def (TW)

Każdą liczbę wymierną można zapisać jako skończony lub okresowy ułamek dziesiętny.

$$(d_n \cdot 10^n + d_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + d_0 + d_{-1} \cdot 10^{-1} + \ldots + (d_m) \cdot 10^m)$$

TW. Zbiór $\mathbb{R}$ jest nie jest przeliczalny

TW. Zbiór $\mathbb{R}$ możemy utożsamić ze zbiorem nieskończonych ułamków dziesiętnych

$\pm \, d_0 , d_1 , d_{-2} \ldots$

$d_{-i} \in \{0,1 \ldots 9\}$

$d_0 \in \mathbb{N}_0$

Arytmetyka zmiennoprzecinkowa to przybliżenie liczb rzeczywistych.

Liczby zmienno przecinkowe zostały ustandaryzowane przez (IEEE) nr 754-1985

Rozróżniamy między formatem pojedynczym i podwójnym

Format pojed. wymaga 32
-||- podwój. -||- 64

Zapis		
V	e	M
1	8	23
V	e	M
1	11	52

$\Longrightarrow$ V oznacza znak liczby

$e_{min} \leq e \leq e_{max}$ wykładnik

M mantysa

$d \in \{0, 1\}$

$$M = d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} \ldots \equiv$$
$$\equiv d_1 d_2 \ldots d_p$$

Postać normalna oznacza, że $d_1 = 1$

$$\boxed{x = (-1)^V 2^e \sum_{j=2}^{p} d_j 2^{-j}} \Rightarrow \text{reprezentacja}$$

emin	emax
-125	128
-1021	1024

Największa możliwa liczba w tym zapisie odpowiada $M = M_{max}$

$e = e_{max}$

$3{,}48 \cdot 10^{38}$

$1{,}80 \cdot 10^{308}$

Definiujemy też znaki specjalne

± INF ∞

NaN zero przez zero.

Najmniejsze „+"

$1{,}18 \cdot 10^{-38}$

$2{,}23 \cdot 10^{-308}$

Wykład 3 - 22/10

Lemat Ascoliego

$I_1 \supset I_2 \supset \dots \subset \mathbb{R} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$

przedziały domknięte $I_i = [a,b]$

Twierdzenie Zbiór liczb niewymiernych w przedziale (a,b) $a<b$ nie jest przeliczalny.

Dowód Załóżmy, że zbiór liczb niewymiernych zawartych (a,b) jest przeliczalny

Niech $x_1, x_2, \dots$ będzie ciągiem tych liczb. Niech $I_1 \subseteq (a,b)$ taki, aby $x_1 \notin I_1$ oraz I_1 domknięty. Jeżeli wybraliśmy $I_1 \dots I_{n-1}$ to $I_n \subseteq (a,b)$ wybieramy tak, że $I_n \subset I_{n-1}$ oraz $x_n \notin I_n$. Z lematu Ascoliego $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Istnieje $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Z wyboru przedziału I_n wynika, że $c \neq x_1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

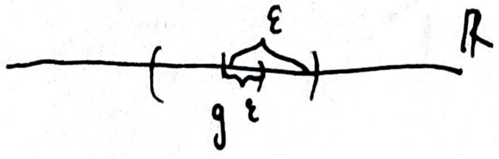
$\Downarrow$

SPRZECZNOŚĆ!

Df Niech X będzie zbiorem, w szczególności $X=\mathbb{R}$, ciągiem elementów X nazywamy dowolne odwzorowanie $f: \mathbb{N} \to X$. Piszemy a_n zamiast $a(n)$, gdy $a: \mathbb{N} \to X$.

Def. Mówimy, że $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą ciągu $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że dla każdego $n \geq N$ mamy $|g - x_n| < \varepsilon$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq N} |g-x_n| < \varepsilon$$



Innymi słowy, w dowolnym otoczeniu g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) to znaczy wszystkie z wyjątkiem skończenie wielu

Niech x_n będzie ciągiem w $\mathbb{R}$. Rozważmy ~~ciąg~~ zbiór wartości tego ciągu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Mówimy, że ciąg x_n jest ograniczony jeżeli powyższy zbiór jest ograniczony zawiera się w pewnym skończonym przedziale

Ciąg $x_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony

Ciąg $x_n = n$ jest ograniczony

Ciąg może mieć tylko jedną granicę

Jeżeli (x_n) i (y_n) są ciągami liczb rzeczywistych, to możemy określić sumę, różnicę, iloczyn i iloraz $(y \neq 0, n \in \mathbb{N})$ tych ciągów wzorami

$$(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n),$$

$$(x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n),$$

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right).$$

Twierdzenie Jeżeli (x_n) zbiega do g, $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ oraz (y_n) zbiega do h $\lim_{n\to\infty} y_n = h$, to

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = g \pm h$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = gh$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{g}{h} \quad (=) \quad y_1 \neq 0, \ n \in \mathbb{N}, \ h \neq 0$$

Oczywiście (x_n) i (y_n) są ciągami liczb nieujemnych.

Tw. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |g|$.

UWAGA

Ciąg $(-1)^n = x_n$ nie jest zbieżny, to znamy, że nie ma granicy.
Ciąg $|x_n| = 1$ jest oczywiście zbieżny

ZBIEŻNY = posiada granicę

TW. (o 3 ciągach)

Jeżeli $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n \in \mathbb{N}$ (lub dla $n \geqslant n_0$) oraz

$g = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \iff$ to $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$

Przykłady

a) $a_n = \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ Kandydat ma granicę 0

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant N} |a_n - 0| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n^p}\right| < \varepsilon$$

Liczba $\varepsilon > 0$ jest ustalona musimy wyznaczyć n.

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^p$$

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$$

Przyjmijmy $N := \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p} \right\rceil$, wówczas $n \geqslant N$ mamy

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon$$

b) Jeżeli $p > 0$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

Niech $p > 1$ oraz $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$

Chcemy pokonać, że x_n dąży do 0. Będzie to znaczyło, że

$$\sqrt[n]{p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1\right)$$

$$(1+x_n)^n = p$$

Z drugiej strony

$$(1+x_n)^n = (1+x_n)(1+x_n)\dots(1+x_n)$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + \binom{2}{1}ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^3 + b^3$$

Zatem

$$(1+x_n)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}x_n \cdot 1^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}x_n^n \,;$$

pomniejszamy wyrażenie (całość dodatnia)

$$(1+x_n)^n > \underline{\underline{1 + nx_n}} \Longrightarrow B$$

$$p = (1+x_n)^n > 1 + nx_n$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, Rightarrow, "n\to\infty"'] & < x_n < & \frac{p-1}{n} \arrow[d, Rightarrow, "n\to\infty"] \\
0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Ponieważ, granica $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p-1}{n} = 0 \quad \left(= (p-1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\right)$

Zatem $x_n = \sqrt[n]{p}-1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, czyli $\sqrt[n]{p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Jeśli p jest mniejsze od 1 to piszemy $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p} = \frac{1}{\underset{>1}{(\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}}}}$, wówczas $\frac{1}{p} > 1$. Możemy zastosować poprzedni argument

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{\lim((\frac{1}{p})^{\frac{1}{n}})} = 1$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

Podobny argument $x_n = \sqrt{n}-1$. Wówczas $x_n \geq 0$

$$n = (1+x_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \ldots + \binom{n}{n}x_n^n$$

$$> \binom{n}{2}x_n^2$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{\cancel{1}\cancel{2}\ldots n}{2\cdot\cancel{1}\cancel{2}\ldots(n-2)} = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$n = (1+x_n)^n > \frac{1}{2}n(n-1)x_n^2$$

$$\frac{2}{n-1} > x_n^2$$

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 0$$

$n\to\infty \Downarrow$ 0 $\quad$ $\Downarrow$ tw. o 3. $\quad$ $\Downarrow n\to\infty$ 0

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0, \text{ czyli } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

Def. Niech S_n będzie ciągiem liczb $\mathbb{R}$. Mówimy, że

a) S_n jest rosnący, gdy $S_{n+1} > S_n$

b) niemalejący, gdy $S_{n+1} \geqslant S_n$

c) malejący, gdy $S_{n+1} < S_n$

d) nierosnący, gdy $S_{n+1} \leqslant S_n$

Ciąg nierosnący lub niemalejący jest monotoniczny

Tw. Ciąg monotoniczny jest zbieżny $\Leftrightarrow$, gdy jest ograniczony

Innymi słowy, ograniczony ciąg monotoniczny, ciąg zbieżny

Przykład ciąg $(1+\frac{1}{n})^n$ jest zbieżny

Rozważmy ciąg $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Dla $n \geqslant 2$ mamy

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})} = \cancel{\frac{1}{1+n}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\boxed{(1+x)^n > 1+nx} \quad \text{Bernoulli} \quad > \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$> \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$$

Wniosek

$$\frac{y_{n-1}}{y} > 1 \Rightarrow y_{n-1} > y$$

Ciąg $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący. Jest także ograniczony. Jest więc zbieżny. Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} =$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

Liczbę tę nazywamy liczbą Eulera. Jest ona przestępna to nie znaczy że jest nie wymierna.

<u>DEF</u> Niech $x_n \subseteq R$ oraz niech dany będzie ciąg $\mathbb{N}$ taki, że $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ Wówczas ciąg $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy podciąg (x_n).

np.

$x_n = (-1)^n$; $2,4,6,8\dots \Rightarrow x_{2n} = 1$

$x_n = (1)^n$; $1,3,5\dots \Rightarrow x_{2n+1} = -1$

Mówimy, że punkt/liczba a jest punktem skupienia ciągu (x_n), jeżeli w dowolnym otoczenie punktem a znajduje się nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu.

Rozważmy, że ciąg $x_n = (-1)^n$. Jego pkt. skupienia to $-1, 1$. Zauważmy że ten ciąg nie jest zbieżny.

<u>Tw.</u> Liczba a jest punktem skupienie ciągu (x_n), jeżeli istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do a.

TW. Ciąg $(x_n) \subseteq R$ ograniczony ma punkt skupienia ?

wykład 4 - 29/10

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} |a_n - q| < \varepsilon$$

Punkt $a \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia ciągu a_n, jeżeli w dowolnym otoczeniu tego punktu jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n)

lim = punkt skupienia ale nie każdy punkt skupienie ≠ lim

$a_n = (-1)^n$

$a_{2n} = 1$ $\quad a_{2n+1} = (-1)$

p. skupienia

ale ciąg an brak granicy

def Ciąg (a_n) jest nazywany ciągiem Cauchiego jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n,m>N} |a_n - a_m| < \varepsilon$$

TW. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny, czyli ma granicę wtd. gdy jest ciągiem Cauchy'ego. (własność zbioru liczb rzeczywistych)

Przykład

Niech $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

Zauważmy, że

$$|x_{2n} - x_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{\geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}}$$

; nie jest zbieżny, ponieważ nie jest ciągiem Cauchiego

$a_n = (-1)^n$

Def Niech (s_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych.
Liczbę $\inf\limits_{j} \sup\limits_{n\geq j} s_n$; nazywamy granicą górną lub limes superior ciągu s_n.

Piszemy $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$

Def Niech (s_n) będzie ciągiem l. $\mathbb{R}$.
Liczbę $\sup\limits_{j} \inf\limits_{n\geq j} s_n$; nazywamy granicą dolną lub limes infimum ciągu s_n.

Piszemy $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n$.

Dopuszczamy sytuację, że $\limsup s_n = \liminf s_n = +\infty$
$\limsup s_n = \liminf s_n = -\infty$

Zawsze granica dolna jest mniejsza bądź równa granicy górnej.

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n$$

TW

Niech (s_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych oraz $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Wówczas

a) $a < \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$, to $a < s_n$ dla nieskończenie wielu wyrazów s_n.

b) $a \leq s_n$ dla nieskończenie wielu wyrazów s_n , to $a \leq \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$

c) Jeżeli $a > \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$, to $a > s_n$ dla wszystkich wyrazów poza być może skończenie wieloma.

d) jeżeli $a \geq s_n$ dla wszystkich wyrazów poza skończenie wieloma to $a \geq \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.

Niech s_n będzie ciągiem liczb ~~$\mathbb{N}$~~ $\mathbb{R}$. Rozważmy dwa zbiory:

$L = \{ r \in \mathbb{R} \ ; \ r < s_n$ dla nieskończenie wielu wyrazów $s_n \}$

$U = \{ r \in \mathbb{R} \ , \ r < s_n$ dla co najwyżej skończenie wielu $n \}$

Mamy $\mathbb{R} = L \cup U$ oraz te dwa zbiory są półprostymi o wspólnym porządku. Ten punkt to limsup s_n.

Def

Piszemy że $s_n \to \infty$, $n \to \infty$, gdy

$$\forall_{M} \ \exists_{N \in \mathbb{N}} \ \forall_{n > N} \quad a_n > M.$$

Oznacza to, że $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = \liminf\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$,

~~jeżeli~~ oraz podobnie $s_n \to -\infty$, $n \to \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty\right)$

jeżeli $\forall_{M \in \mathbb{R}} \ \exists_{N \in \mathbb{N}} \ \forall_{n > N} \quad a_n < M$.

Def Niech (a_n) będzie ciągiem liczb $\mathbb{R}$.

Wyrażenie
$$\sum_{n=i}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots ,$$

nazywamy szeregiem.

Ciąg sum częściowych jest zdefiniowany następująco

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Szereg to ciąg sumy częściowych

$0 = (1-1)+(1-1)\ldots \neq 1+(-1+1)+(-1+1) = 1$

Tylko zostały przemienione nawiasy ABSTURD.

Def Jeżeli ciąg sum częściowych $(s_n)_{n\geq 0}$ szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do S ; $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbiega do S oraz piszemy $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeżeli ciąg sum częściowych nie jest zbieżny to mówimy że szereg nie jest zbieżny

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Zauważmy że

$$\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \frac{j+1-j}{j(j+1)} = \frac{1}{j(j+1)}$$

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ldots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{0} + \ldots + \underbrace{\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)}_{0} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\sum_{n=1} \frac{}{n}$ nie jest zbieżny.

Wynikało to z kryterium Cauchego. Dla szeregów przyjmuje ono postać

TW. (Kryterium Cauchego).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n, m \geq N \wedge m > n$ mamy

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

Zauważmy, że to znaczy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie, że dla $n > N$

$$|a_{n+1}| < \varepsilon$$

To oznacza jeżeli szereg ten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Innymi słowy, warunkiem koniecznym zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest aby był zbieżny (wyrazów ciągu a_n do zera)

Zauważmy, że warunek ten nie jest wystarczający. To znaczy nie jest prawdą, że jeżeli $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

KONTRPRZYKŁAD

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \Rightarrow$ nie jest zbieżny

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n=k-1} a_k$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

Zauważmy, że zmiana skończenie wielu wyrazów szeregu nie wpływa na jego zbieżność.

Ciąg monotoniczny, jeżeli jest ograniczony to jest zbieżny

Tw Szereg o wyrazach nieujemnych $(a_n \geq 0)$ jest zbieżny $\iff$ gdy jego ciąg sum częściowych jest ograniczony.

Rzeczywiście mamy przecież $s_1 \leq s_2 \leq \dots$

Przykład

Niech $|x| < 1$, rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Ten szereg jest zbieżny do $\frac{1}{1-x}$. Mamy bowiem

$$\sum_{n=\underset{0}{\cancel{1}}}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \quad (*)$$

oraz $x^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, gdy $|x|<1$.

Zatem $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

Wykażemy (*)

Uzasadnienie indukcyjne

PRZEPISZ

$N=1$

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = 1+x$$

z drugiej jednak strony $\frac{1+x^2}{1-x} = \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{\cancel{1-x}}$

Załóżmy, że dla $N \in \mathbb{N}$ mamy $\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

Musimy wykazać, że $\sum_{n=0}^{N+1}, x^n = \frac{1-x^{N+2}}{1-x}$

Mamy $\sum_{i=0}^{\cancel{N}\,N+1} x^n = \sum_{\cancel{i=0}\; n=0}^{N} x^n + x^{N+1}$

Z założenia indukcyjnego $\sum x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} + x^{N+1} =$

$$= \frac{1-x^{N+1}+x^{N+1}-x^{N+2}}{1-x} = \frac{1-x^{N+2}}{1-x}$$

Jeżeli $|x| \geq 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ nie jest zbieżny

Zauważmy, że $|x|^n \geq 1$. Nie jest spełniony warunek konieczny $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Przykład

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ istnieje i oznaczamy „e"

Pokażemy, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \Rightarrow$ szereg jest zbieżny

Wystarczy zauważyć, że ciąg jest ograniczony

$$\sum_{k=0}^{\overset{n}{\cancel{\infty}}} \frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+23}+\ldots+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\leq 3.$$

$$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0+\binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$

$$+\binom{n}{n}1^0+1^0\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Zastosowano $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\ldots$

$$=1+\boxed{\frac{n!}{1!(n-1)!}}\Rightarrow n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n!}{0!n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cancel{\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)}\ldots$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

PRZEMYSZ

Zatem

$$e=\lim_{n\to\infty}t_n\leq\lim_{n\to\infty}\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{ISTNIEJE}}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$$

wykład 5 - 5/11

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Ciąg sum częściowych $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, zbieżny to szereg jest zbieżny

Ciąg $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ jest zbieżny do liczby e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Uzasadniamy, że $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Niech $t_n = (1+\frac{1}{n})^n$; $S_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$

$$t_n = (1+\tfrac{1}{n})^n = \binom{n}{0} 1^n (\tfrac{1}{n})^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (\tfrac{1}{n})^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} (\tfrac{1}{n})^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 (\tfrac{1}{n})^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\le 1} + \frac{1}{3!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\le 1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\le 1} + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = S_n$$

Z tego wynika, że

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n \le \lim_{n\to\infty} S_n$$

Dla $n \geqslant m$

$$t_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{\substack{\cancel{m}\\ n}}\right)$$

Prawą stronę kończymy na wyrazie „m". Stąd nierówność $\geqslant$.

Zatem przechodząc do granicy

$$\lim_{n\to\infty} t_n \geqslant 1+1+\ldots+\frac{1}{m!} = S_m$$

Ta nierówność zachodzi dla każdego m. Przechodzimy z m do ∞

Zatem

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n \geqslant \lim_{m\to\infty} S_m$$

czyli

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ jest szybko zbieżny

$$e - S_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right\}$$

zamiast kolejnych „2" bo możemy sobie porachć z szeregiem geo

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\cdot n}$$

Uzasadniliśmy, że $\underline{0 < e - S_n < \frac{1}{n!n}}$

Liczba e **nie** jest liczbą wymierną

Ale, załóżmy, że e jest wymierna, $e = \frac{p}{q}$; $p, q \in N$

Wówczas $0 \le e - S_q < \frac{1}{q!q} \quad | \cdot q!$

Zatem $0 < q!(e - S_q) < \frac{1}{q}$. SPRZECZNOŚĆ ↯

Jeżeli $e = \frac{p}{q}$, czyli jest wymierne to $q! \cdot e - q! \frac{p}{q} \in N$

Podobnie $q! \cdot S_q = q! \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{q} \underbrace{\boxed{\frac{q!}{j!}}}_{\in N} \in N$

Zatem istnieje liczba naturalna $q!(e - S_q)$ zawarta w przedziale $(0,1)$

FAŁSZ. (sprzeczność). Musi być $e \notin Q$.

TW. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do A, szereg $\sum_{n=1} b_n$ jest zbieżny do B

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny do $A + B$

Podobnie, $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ zbiega do $c \cdot A$

TW. Wyrazy szeregu zbieżnego można dowolnie grupować w skończone sumy

Jeżeli $\sum_{n=1} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots$

TW. (Kryterium Porównawcze)

Jeżeli (a_n) i (b_n) są ciągami liczb nieujemnych takimi, że

$a_n \le b_n$ dla $n \ge n_0$, $n_0 \in N$.

Wówczas

a) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

b) jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny

Zauważmy, że $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$

Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ jest zbieżny

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$ jest zbieżny

Wystarczy uzasadnić, że (ciąg) szereg (S_n) jest ograniczony jest $\Leftrightarrow$ jest ograniczony jest ciąg ~~tj~~ t_j.

$$\underline{\underline{n < 2^j}}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots +$$

$$2^j a_{2^j} = t_j$$

Jeżeli t_j ograniczony to s_n ograniczony

$\underline{\underline{n > 2^j}}$ Z drugiej strony $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{j-1} a_{2^j}$$

Zatem

$$S_n \geq \frac{1}{2} t_j$$

<u>Wniosek</u>. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny, gdy $p > 1$, a rozbieżny $p \leq 1$.

Oczywiście jeżeli $p \leq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ nie jest zbieżny

Niech $p > 0$.

Stosujemy tw. Cauchy'ego o zagęszczaniu. Otrzymujemy szereg

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{1}{(2^j)^p} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1-p)j}.$$

Ten szereg to szereg geometryczny. Jest on zbieżny, gdy $2^{1-p} < 1$, czyli $p > 1$.

Tw. (Kryterium Cauchy'ego)

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem <u>liczb nieujemnych</u>. Niech także

$$\alpha = \limsup \sqrt[n]{a_n}.$$

Wniosek

Jeżeli a_n, b_n są dodatnie oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ 0<k<\infty$

Wówczas szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ to dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje n_0 takie, że dla $n \geqslant n_0$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$. To znaczy, że

$$\cancel{\frac{a}{b}}\ \frac{a_n}{b_n} < k+\varepsilon \text{ ; czyli}$$

$$a_n < (k+\varepsilon)\, b_n$$

Z kryterium porównawczego, jeżeli $\sum b_n$ zbiega to $\sum a_n$ zbiega.
Jeżeli jest $\overset{\text{(szereg } a_n)}{\text{rozbieżny}}$ to jest $\overset{\sum b_n}{\text{rozbieżny}}$

Z $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$ wynika takie, że $k - \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$,

czyli $k-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$

Jeżeli $\varepsilon<k$, to mamy dla $n \geqslant \overset{n_0}{\cancel{n_0}}$, że $(k-\varepsilon)b_n < a_n$.
Stosujemy kryt. porównawcze
Wiemy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

<u>PYT.</u> Dla jakich $p>0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny?

<u>TW</u> Jeżeli a_n jest ciągiem liczb dodatnich takim, że
$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots$ to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ zbieżny jest
szereg $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 2^j a_{2^j} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

TW. CAUCHY'EGO
O ZAGĘSZCZANIU

Niech $S_n = a_1 + \dots + a_n$
$t_j = a_1 + \dots + 2^j a_{2^j}$

Wówczas

1) Jeżeli $\ell < 1$ to szereg jest zbieżny

2) Jeżeli $\ell > 1$ to szereg jest rozbieżny

3) Jeżeli $\ell = 1$ to istnieją szeregi zbieżne, oraz istnieją szeregi rozbieżne.

Tw. (d'Alembert)

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich, to

1) jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje i jest < 1 to szereg jest zbieżny

2) -||- > 1 -||- rozbieżny

3) istnieją szeregi zbieżne i rozbieżne takie, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}}} = 1$$

Ten szereg jest rozbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \text{wówczas} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1$$

Ten szereg jest zbieżny

Przykład

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

Wyrazy tego szeregu to $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

Zauważmy, że $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{4}$$

Nie można więc zastosować kryterium d'Alemberta bo granica nie istnieje

Zauważmy, że $\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} \leq \sqrt[n]{\frac{4}{2^{n+1}}} = \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}$

Z drugiej strony $\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} \geq \sqrt[n]{\frac{2}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$

Mamy oszacowanie

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Z kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny

Wszystko to co było to dot. szeregów o wyrazach nieujemnych wykład 6 18|11

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Suma częściowa szeregu $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

Mówimy, że szereg jest $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ jest zbieżny do a jeżeli ciąg sum częściowych S_N jest zbieżny do a. Zakładaliśmy, że wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są nieujemne.

→ Tw. Cauchego
$\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny

→ Tw. D'Almberta
$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny

Teraz rozważać będziemy szeregi o wyrazach ~~pootat~~ dowolnych.

Tw. (Dirichlet)

Załóżmy, że

a) sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są wspólnie ograniczone;

b) $b_1 \geq b_2$

c) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

Wówczas szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ jest zbieżny}$$

Tw. (Abela)

Załóżmy, że

a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

b) ciąg (b_n) jest monotoniczny i ograniczony

Wówczas szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ jest zbieżny}$$

Tw. (Leibniz)

Załóżmy, że:

1° $b_1 \geq b_2 \geq \dots$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ jest zbieżny

Zauważmy, że kryterium Leibniza wynika z kryterium Dirichta. Faktycznie mamy bowiem, że ciąg sum częściowych $\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}$ jest wspólnie ograniczony

Z kryterium Leibniza wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ jest zbieżny.

Zauważmy że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny

Def. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny jest zbieżny

Def Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nie jest zbieżny to szereg jest warunkowo zbieżny

Przykład

Szereg archarmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Tw. Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją zbioru liczb $\mathbb{N}$ w siebie

O szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n\,\sigma(n)}$ mówimy, że powstał z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ przez zmianę kolejności jego wyrazów.

Tw. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest, także zbieżny oraz suma tych szeregów są takie same.

Przykład

Rozważmy szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots$ Ten szereg jest warunkowo zbieżny. Zmieńmy kolejność wyrazów tego szeregu tak, aby po każdym wyrazie dodatnim występowały dwa ujemne.

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

Niech t_n będzie ciągiem sum częściowych tego szeregu.

$$t_{3n}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{2j}\right)=\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots\right)\right.$$

to znaczy, że t_{3n} jest zbieżne $\frac{1}{2}$ sumy szeregu $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=S$

Zauważmy, że

$$\left.\begin{array}{l} t_{3n-1}\quad t_{3n}+\frac{1}{4n} \\ t_{3n-2}=t_{3n-1}+\frac{1}{4n-2} \end{array}\right\}\ \text{zatem}\quad t_n \to \frac{1}{2}S$$

Tw. Riemann

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny

oraz $B \in [-\infty; +\infty]$, wówczas istnieje permutacja

σ, taka, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_{b(\sigma)}$ jest ~~zate~~ zbieżny do

B.

Def

Jeżeli $\sum_{n=D}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{b=0}^{\infty} b_n$ są szeregami, to

szereg $\sum_{n=0} \cancel{a_n} c_n$

$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ (; $n=0,1\dots$) nazywamy

iloczynem Cauchego wyjściowych szeregu

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2) = \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} +$$

$$+ \underbrace{a_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0}_{c_2} + \dots$$

Przykład

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, ten szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Rozważmy iloczyn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}}\right) \right)$$

Jest to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \cdot 1$$

$$c_n - (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-j-1)(j+1)}}$$

Zauważmy że

$$(n-j+1)(j+1) = \left(\tfrac{1}{2}n+1\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}n-j\right)^2 \leq \left(\tfrac{1}{n}+1\right)^2$$

Zatem

$$|c_n| \geq \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\dots+1}\right) = \frac{n+1}{\frac{1}{2}n+1} \longrightarrow 2$$

Ten szereg nie jest zbieżny, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}$ jest bezwzględnie zbieżny

2) $\sum_{n=0} a_n = A$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$

4) $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$

Wówczas $\sum_{n=0}^{\infty} \overset{c_n}{\cancel{a_n}} = AB$

TW. Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne. Wówczas ich iloczyn jest bezwzględnie zbieżny

Dowód

Niech

$$\tilde{c}_n = \sum_{j=0}^{n} |c_j|$$

Wówczas

$$\tilde{c}_n = \sum_{j=0}^{n} |c_j| = \sum_{j=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right| =$$

$$\le \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} |a_k b_{j-k}|$$

$$\le |a_0|+|b_0|+|a_1||b_0|+|a_0||b_1|+\dots+$$
$$|a_0||b_n|+|a_1|b_{n-1}|+\dots+|a_0||b_0|)$$

$$= |a_0|(|b_0|+|b_1|+\dots|b_n|)$$

$$= |a_1|(b_n+\dots+b_{n-1})$$

$$= \dots + |a_1||b_0|$$

$$\le (|a_0|+\dots|a_n|)(|b_0|+\dots b_1))$$

Zatem ten szereg jest zbieżny

Przykład

Niech $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ten szereg jest bezwzględnie zbieżny $\forall_{x\in\mathbb{R}}$. Wynika to z kryterium d'Alemberta

Rozważmy ilorazy $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x|^{n-1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Niech teraz $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $b_n = \frac{y^n}{n!}$

Wówczas $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{y^{n-j}}{(n-j)!} =$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j} = \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}}_{(x+y)^n}$$

$n=1 \Rightarrow x+y$

$n=2 \Rightarrow x^2+2xy+y^2$

$n=3 \dots$

Zatem

$$E(x)\,E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum \frac{1}{n!}(x+y)^n = \cancel{\#}\,E(x+y)$$

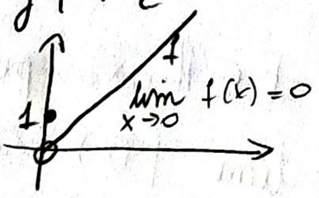
Ta funkcja to $\exp x = e^x$.

Granica funkcji (w punkcie).

Cauchego

Def. Niech E będzie podzbiorem R, x_0 jest punktem skupienia (w dowolnym otoczeniu x_0 jest punkt ze zbioru E różny od x_0. Niech także $f: E \to \mathbb{R}$ będzie funkcją

Mówimy, że f ma w punkcie x_0 ma granicę g jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ o ile $x \in E$, $0 < |x - x_0| < \delta$.



$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in E} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Zauważmy, że punkt x_0 nie musi być należeć do zb. E.

Punkt x_0 ma być tylko punktem skupienia zb. E

Def. Heinego

$E \subseteq R$, x_0 punktem skupienia E wówczas g jest granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla dowolnego ciągu $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $x_n \in E$ mamy $f(x_n)$ zbiega do g.

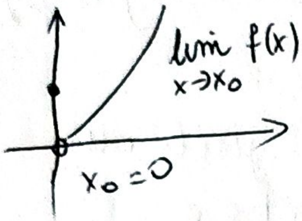
Wykład 7   26/11

$E \subseteq \mathbb{R}$

x_0 jest punktem skupienia E – to znaczy w dowolnym otoczeniu x_0 znajduje się punkt z E różny od x_0.

$f : E \to \mathbb{R}$

Mówimy, że $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in E}{\forall}\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \neq f(0)$

Tw. $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punkt skupienia E $f, g : E \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$

Wówczas

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f : g)(x) = a : b$; $g(x) \neq 0$, $x \in E$.
$b \neq 0$

Tw. Przy tych samych założeniach. Jeżeli dla pewnej liczby $\delta > 0$ oraz $0 < |x-x_0| < \delta$

1) $f(x) < g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$? zachowuje słabe nierówności

2) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

3) $f(x) < b \Rightarrow f(x) \leq b$? — " —

4) $f(x) \leq b \Rightarrow f(x) \leq b$

Tw. $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punkt skupienia E. Jeżeli dla $x \in E$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,

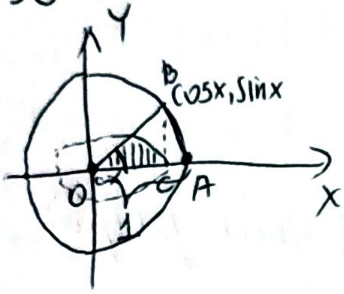
$f, g, h : E \to R$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = C$; to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ istnieje i jest równa

„ C".

Pole $\triangleleft = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi r^2$
Pole $\bigcirc = \pi R^2$
Pole $\triangle = ~~\pi~~ \frac{1}{2} ah$

→ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



Uzasadnimy, że

$\cos^2 x \leq \frac{\sin x}{x} < 1$ dla $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

Funkcje $\cos^2 x$ i $\frac{\sin x}{x}$ są parzyste,

więc musimy udowodnić dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Pole wycinka OCB < Pole $\triangle$ OAB < Pole wycinka OAB

$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cos^2 x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1$

$\frac{x}{2} \cos^2 x < \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} \quad \Big/ : \frac{x}{2}$

$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Zauważmy, że $|\sin x| \leq |x|$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ mamy

$\sin x < x$

ale dla „$-x$" $\sin(-x) < (x)$

$-\sin x < x$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ $\sin x > x \implies |\sin x| \leq |x|$

Dla $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ mamy $|\sin x| \leq 1$. Zatem zawsze

$|\sin x| \leq |x|$

Zatem $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

Mamy $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\lim_{x\to 0} (1-\sin^2 x) \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$

$1-\lim_{x\to 0} (\sin^2 x) \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$

$\underbrace{1-\underset{x\to 0}{\lim}\underset{\downarrow\, 0}{(\sin x)}\ \underset{x\to 0}{\lim}\underset{\downarrow\, 0}{(\sin x)}}_{1} \leqslant$ -||- $\leqslant 1$

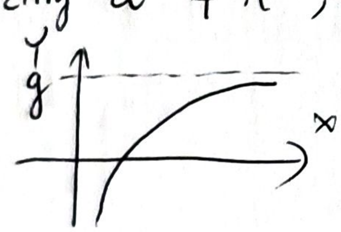
$\leqslant$ -||- $\leqslant 1$

$\}\ x\to 0$

1 z twierdzenia o trzech funkcjach

Df. Mówimy, że granicą funkcji f w nieskończoności jest liczba g, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje M takie, że dla $x>M$ zachodzi $|f(x)-g|<\varepsilon$.

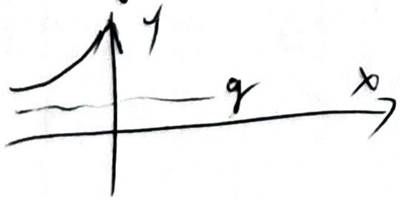
Załóżmy że $f:(b;\infty)\to\mathbb{R}$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = g$

Podobnie granica funkcji f w $-\infty$ jest równa g, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje $m\in\mathbb{R}$ takie, że dla $x<m$.

$|f(x)-g|<\varepsilon$; zakładamy $f(-\infty,a)\to\mathbb{R}$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=g \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x>M}{\forall}\ |f(x)-g|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=g \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x<m}{\forall}\ |f(x)-g|<\varepsilon$

Przykład

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$[x] \Rightarrow$ ~~$\mathbb{N}$~~ $\mathbb{Z}$, która jest zaokrągleniem w dół „x". (całość z „x")

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$$

Wybierzmy $\varepsilon>0$, istnieje wówczas $\varepsilon>0$. Istnieje wówczas $n_0\in\mathbb{N}$

takie, że dla $n\geqslant n_0$ $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon$.

Jeżeli $x>n_0+1$, to $[x]>n_0$. Zatem $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon$.

To znaczy, że $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=e$

Dla $x>1$ mamy

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

Z drugiej strony

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x \geqslant \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{[x]+1}}$$

Uzasadniliśmy, że

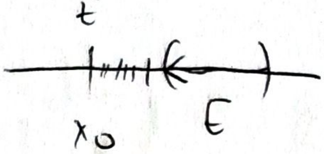
$$\underbrace{\left(1+\underset{\downarrow e}{\frac{1}{[x]-1}}\right)^{[x]+1}}_{\downarrow\, e}\frac{1}{1+\underset{\downarrow 1}{\boxed{\frac{1}{[x]+1}}}_{\to 0}} \leqslant \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1}}_{\substack{x\to\infty \\ \downarrow \\ e}} \leqslant \underbrace{\left(1+\underset{\downarrow e}{\frac{1}{[x]}}\right)^{[x]}}_{\downarrow\, e}\left(1+\underset{\downarrow 1}{\boxed{\frac{1}{[x]}}}_{\to 0}\right)$$

Def. Niech $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $E \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest ciągła w x_0 jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $x \in E$, $|x - x_0| < \delta$ zachodzi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \ \forall_{x \in E} \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

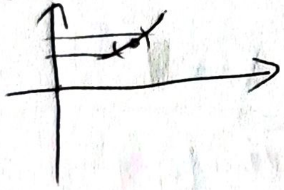
Mówimy, że f jest ciągła na zb. E jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Jeżeli x_0 jest punktem izolowanym, to f jest ciągła w tym punkcie.



Tw. Jeżeli $f : E \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in E$ to

(1) Istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że f jest ograniczone na $U \cap E$.



(2) $f(x_0) \neq 0$ to istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że f ma stały znak na $U \cap E$.

Tw. Niech $f: E \to \mathbb{R}$ $g: G \to \mathbb{R}$ oraz $f(E) \subseteq G$. Niech $h = g \circ f$. Jeżeli g jest ciągłe w $f(x_0) \in G$, to h jest ciągłe w x_0.

Przykłady

1) $f(x) = c \in \mathbb{R}$
2) $f(x) = x \in \mathbb{R}$
3) wielomiany
4) wartość bezwzg $|x|$
   $||x| - |y|| \leq |x - y|$
5) f. wymierne $\frac{A(x)}{B(x)}$
   $A(x) \wedge B(x)$ wielomiany, $B(x) \neq 0$
6) f. trygonom.

$$|\sin x - \sin y| = \left|2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}\right| \longrightarrow 0$$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$

7) f. wykładnicza $f(x) = a^x$ $(a > 1)$

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Funkcje ciągłe

Dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taki, że

(*) $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$, jeśli $n \geq n_0$

Zbadajmy $\lim\limits_{x\to 0} a^x$

z (*) mamy $1-\varepsilon < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$

Podobnie : $1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$

Jeżeli $|x| < n_0$ to

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$$

To znaczy $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ $\quad a > 1$

$\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ $\quad 0 < a < 1$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x = \lim_{x\to 0}(a^{-1})^x = \lim_{x\to 0}(a)^{-x} = \lim_{x\to 0} a^x = 1$$

Niech teraz $x_0 \in \mathbb{R}$ wówczas $\lim\limits_{x\to x_0} |a^{x} - a^{x_0}| =$

$$= \lim_{x\to x_0} \left| a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right)\right| = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} |\overset{\to 0}{a^{x-x_0} - 1}| = 0$$

Zatem a^x jest ciągłe na $\mathbb{R}$

Def. Załóżmy, że $E = (a,b)$ oraz $f : E \to \mathbb{R}$. Niech $a \leq x_0 < b$

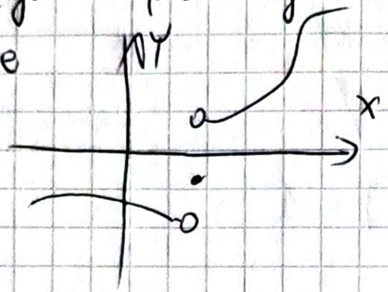
Mówimy że liczba g jest granicą ~~lewo~~ prawostroną funkcji f w punkcie x_0 jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $x_0 < x < x_0 + \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \ \forall_{x \in (a,b)} \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Podobnie definiujemy granicę lewostronną

Piszemy $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$; $f(x_0+0)$
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$; $f(x_0-0)$ $\Big\}$ oznaczenie

Nieciągłości pierwszego rodzaju to sytuacje gdy $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ istnieje



$\lim_{x\to x_0^-} f(x_0)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x_0)$

Wykład 8 3|12

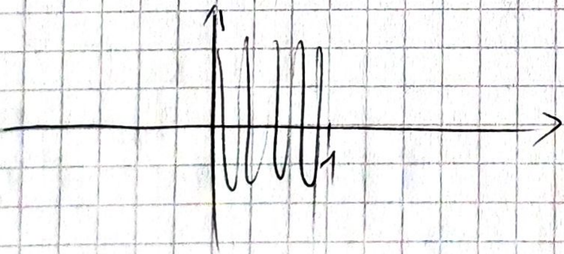
Nieciągłość która jest drugiego rodzaju to nie jest ciągłość pierwszego rodzaju.

Przykład

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Ta funkcja ma ciągłości drugiego rodzaju

2) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$



Granica w „0" nie istnieje
Istnieją bowiem dwa ciągi (x_n), (y_n), $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ takie, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_0)$

Niech $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

Wówczas $f(x_n) = \sin n\pi = 0$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

Niech $y_n = \frac{2}{(1+4n)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

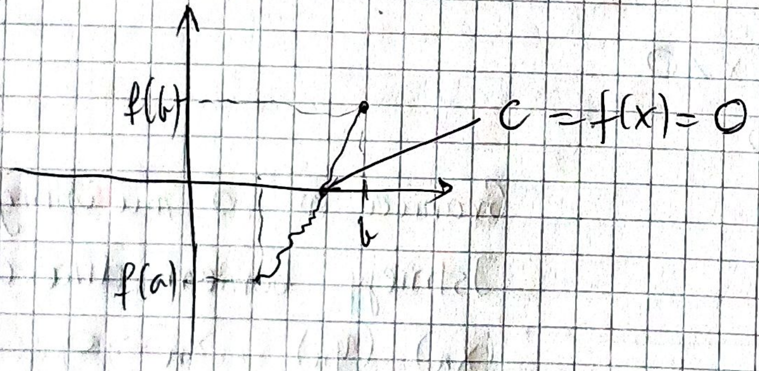
Wówczas

$$f(y_n) = \sin\frac{(1+4n)\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

W konsekwencji $\lim\limits_{\substack{\cancel{n\to\infty} \\ x\to 0}} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje.

TW. (Darboux) (o osiąganiu kresów)

Jeżeli g jest ciągła na przedziale „I" oraz dla $a \in I$ $f(a) = A$, dla $b \in I$ $f(b) = B$ to dla każdej liczby C która jest $A < C < B$ istnieje $c \in I$, $a < c < b$ takie, że $f(c) = C$.



Tw. (Weierstrass)

Funkcja ciągła na przedziale domkniętym i skończonym jest ograniczona. Co więcej, istnieje x_{max} taki, że $f(x_{max}) = \sup_{I} f(x)$, oraz $x_{min} \in I$ taki, że $f(x_{min}) =$
$= \inf f(x)$

Wniosek

Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a,b]$, to
$f[a,b] = [m, M]$, gdzie $m = \inf_{[a,b]} f$

$M = \sup_{[a,b]} f$

Def Funkcja $f: E \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze E, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x_1,x_2 \in E} \quad |x_1-x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon.$$

Załóżmy, że $f: E \to \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie $x_1 \in E$. To znaczy

$$\forall_{x_1 \in E} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x_2 \in E} \quad |x_1-x_2| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_2)| < \varepsilon$$

Jeżeli funkcja jest jednostajnie ciągła, to liczba $\delta > 0$ z def. ciągłości jest taka sama dla $\forall_{x} x \in E$.

Przykładem funkcji, która nie jest jedn. ciągłą

$$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{x_1,x_2 \in E} \quad |x_1-x_2| < \delta_1 \quad \wedge \quad |f(x_1)-f(x_2)| \geq \varepsilon_2.$$

Niech $h(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

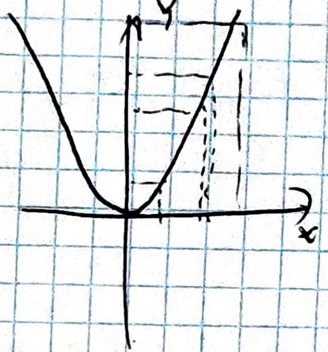
$$y_n' = \sqrt{n+1}, \quad y_n'' = \sqrt{n}$$

Wówczas

$$\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$f(y_n') = n+1$$

$$f(y_n'') = n$$



Zatem

$$|f(y_n') - f(y_n'')| = 1$$

Tw. (Cantor)

Funkcja ciągła na domkniętym przedziale skończonym jest jednostajne ciągła.

Def $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ to $x_1, x_2 \in E$

1) f. ros $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ to $f(x_1) < f(x_2)$
2) f. niemal $\Leftrightarrow$ $x_1 \leq x_2$ to $f(x_2) \leq f(x_2)$
3) f. mal. $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
4) f. nieros. $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Tw. Jeżeli f jest niemalejąca na przedziale (a,b) to ona ma granicy jednostronne w każdym punkcie (a,b).

Tw. Ściśle monotoniczna funkcja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ma f. odwrotną (jest różnowartościowa) $f^{-1}: D \rightarrow \mathbb{R}$ gdzie $D = f(E)$ oraz f^{-1} jest tej samej monotoniczności.

Jeżeli $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, jest ciągła i ściśle monotoniczna TW
to $D = f([a,b])$ jest przedziałem domkniętym ~~od f(a)~~
od $[f(a), f(b)]$ (rosnąca) lub $([f(b), f(c)]$ malejąca).
Funkcja odwrotna jest ciągła.

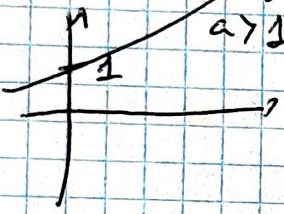
Przykł

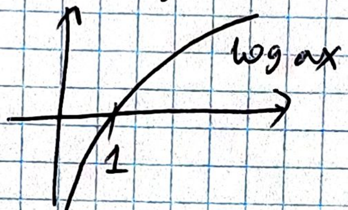
a) $y = x^n$ jest rosnąca i ciągła na zbiorze $(-\infty; \infty)$ jeżeli n jest nieparzyste oraz $[0, +\infty)$ gdy n jest parzyste

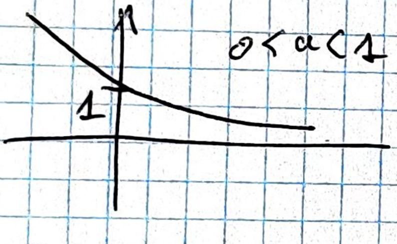
Z tego wynika, że f. odwrotna $x \longmapsto \frac{1}{x}$ jest ciągła na $[0; +\infty)$, gdy n parzyste $(-\infty; \infty)$ gdy n jest parzyste

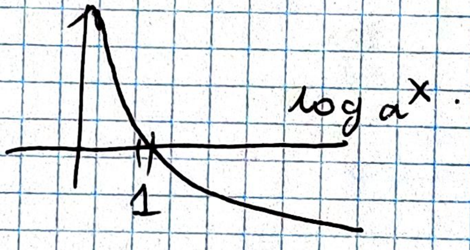
b) $y = a^x$ $(0 < a < 1$ lub $a > 1)$ jest ciągła w $\mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna.

Zatem $\log_a x$ jest ciągła



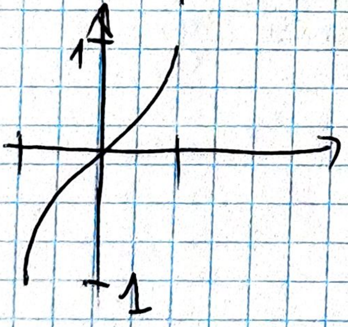




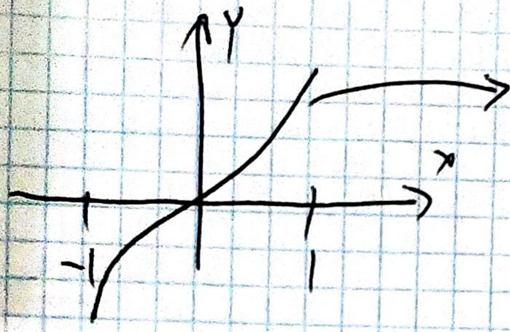


c) Funkcje tryg. są ciągłe nie są jednak różnowartościowe na całej dziedzinie.

Funkcja $y = \sin x$ jest ściśle rosnąca dla $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



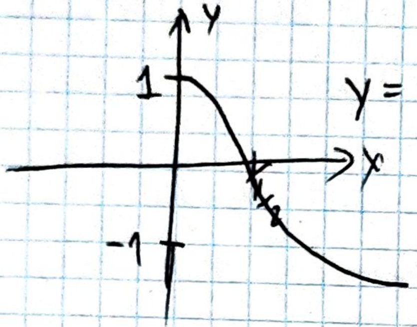
Istnieje funkcja do niej odwrotna na tym przedziale



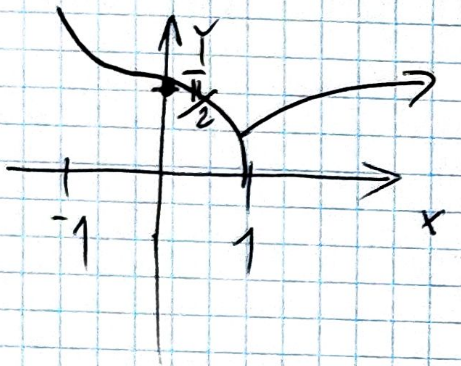
odwrotność $\sin x$

$\Downarrow$

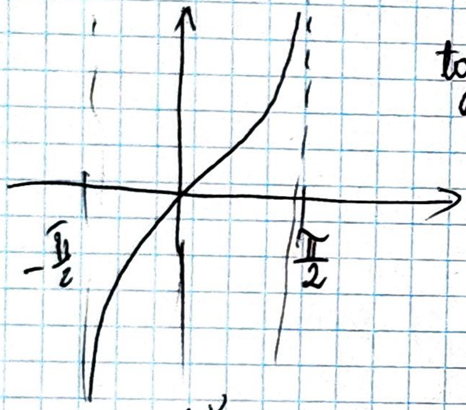
$\arcsin x$.



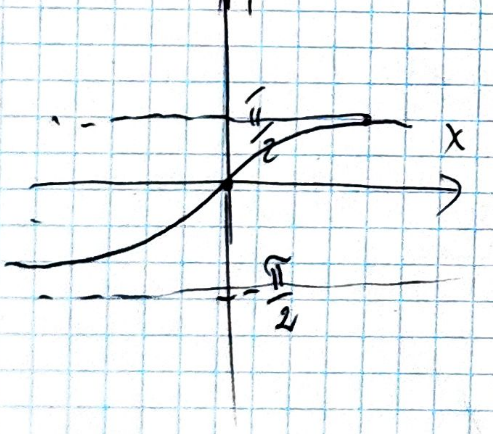
$y = \cos x \quad x \in [0; \frac{\pi}{2}]$



$\arccos x \Rightarrow$ odwrotność $\cos x$



tgx



$\text{arctg}x \Rightarrow$ odwrotność $\text{tg}x$

POCHODNE. RÓŻNICZKOWALNOŚĆ FUNKCJI

Def Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ dla $h\neq0$ rozważmy ilorazy różnicowe

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

zauważmy, że to wyrażenie ma sens: dla małych h, $x_0+h\in(a$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Longrightarrow$$ POCHODNIA FUNKCJI f W PUNKCIE $x_0\in(a,b)$

Pochodną oznacza się przez $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$ lub $\frac{dy}{dx}(x_0)$ lub $D_f(x_0)$ lub $\dot{f}(x_0)$.

Możemy definiować pochodne jednostronne $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}= f_+'(x$

oraz

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_-'(x_0)$$

Przykład

$f(x)=|x|$.

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{|h|}{h}=1$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{|h|}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

Zatem

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$ NIE ISTNIEJE

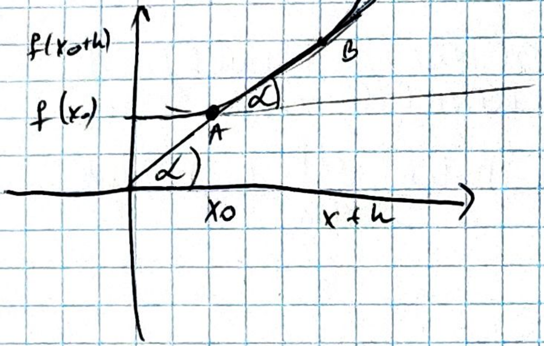
TW. Jeżeli f ma pochodną x_0 to f jest ciągła w x_0

INTER. GEOMETRYCZNA POCHODNEJ

Rozważmy prostą, która przechodzi przez punkty

$A = (x_0, f(x_0))$

$B = (x_0+h, f(x_0+h))$



$$tg\alpha = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = $$

$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Równanie tej prostej $y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)$

Jeżeli $h \to 0$, to $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$

W granicy dostajemy |prostą styczną|

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

X nachylenia prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x_0)$ to właśnie pochodna $f'(x_0)$.

Jeżeli $f(t)$ to droga przebyta przez pewien punkt w czasie t, to $f(t+h) - f(t)$ to droga przebyta w czasie między t oraz $t+h$

~~Iloraz~~ to iloraz różnicowy $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

$\underset{\text{w czasie } t}{V_{śr}} = f'(t)$

Istnieje drugi sposób wprowadzenia pojęcia pochodnej funkcję $y=f(x)$. Szukamy prostej, która w najlepszy sposób przybliża tę funkcję. Rozważmy wszystkie przez punkt $(x_0, f(x_0))$

Równanie tych prostych

$$y - f(x_0) = \alpha(x - x_0) \qquad \alpha \in R$$

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

Prosta ma przybliżenie $y = f(x)$

Zatem wyciągamy, aby $\frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} C$

Innymi słowy, $\frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = \gamma(x - x_0)$,
gdzie $\gamma(x - x_0) \to C$ gdy $x \to x_0$

To równanie możemy również zapisać w postaci

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + \gamma(x - x_0)(x - x_0),$$

o γ dobrze jest myśleć, że jest to błąd jaki popełniony przybliżając $f(x)$ prostą

Równoważnie

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + \gamma(h)h$$

zauważmy że

$$\frac{x(h)h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} C$$

Df Mówimy, że $f: (a,b) \to R$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$ jeżeli liczba $\alpha \in R$ oraz funkcje R $U \to R$, U pewnie otoczenie 0 takie [illegible]

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + R(h)$$

gdzie

$$\frac{R(h)}{h} \xrightarrow[h\to c]{} c$$

Funkcja jest różniczkowana w x_0, jeżeli można ją przybliżyć odwzorowaniem liniowym $h \mapsto \alpha h$ (dowolny jej przyrost) popełniając błąd ~~R~~. R, która ma tę własność, że nawet po podzieleniu przez przyrost h - dąży do

Ta funkcja $f(a,b) \to R$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 $\iff$ istnieje w x_0 pochodna $f'(x_0)$ funkcji f

Wówczas $\alpha = df(x_0) = f'(x_0)$

DEF Mówimy, że funkcja $f(a,b) \to R$ jest różniczkowalne na (a,b), jeżeli jest różniczkowalne w każdym punkcie przedziale (a,b) $\iff$ punkcie istnieje pochodna f'.

Istnieje wówczas funkcja $x \mapsto f'(x)$ Funkcję tę nazywamy pochodną.

PRZYKŁADY

1° $c'=0$ $\quad \lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\frac{c-c}{h} = 0$

2° $f(x)=x^n$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{n\to0} n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-1} h + \ldots + h^{n-1} = n x_0^{n-1}$$

zatem $(x^n)' = nx^{n-1}$

$n=1$

3°

$\sin x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin x(\cos h-1)}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \sin x\left[\frac{\cos h-\cos 0}{h}\right] +$$

$$+ \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h\to 0} \sin x \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} + \cos x =$$

$$= \cos x + \sin x \lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{-\sin\frac{h}{2} \nearrow 1}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\frac{h}{2}}_{\to 0} \to 0 = \cos x$$

$(\sin x)' = \cos x$

4° $\cos x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos x-1)}{h} + -\left(\lim_{h\to 0} \sin x \frac{\sin h}{h}\right) = -\sin x$$

$(\cos x)' = -\sin x$

3° $x \to a^x \quad a>1$

Pokażemy najpierw, że $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$

Uwzględniamy

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{a^h-1}{h} = \ln a$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{a^h-1}{h} = \ln a$$

Niech $a^h - 1 = \dfrac{1}{x}$

Wówczas $h \to 0_+ \iff x \to \infty$

Rozważmy równanie

$$a^h = 1 + \frac{1}{x} \quad \Big|\log_n$$

$$\log_n a^h = \log\left(1+\frac{1}{x}\right.$$

$$h \cdot \ln a = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$\ln x \Rightarrow$ funkcja ciągła.

$$h = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln a}$$

Mamy więc

$$\frac{a^h-1}{h} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln a}} = \ln a \, \frac{1}{\underset{\substack{\Downarrow \\ x\to\infty \\ e}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}} = \underline{\underline{\ln a}}$$

~~$= \ln a \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$~~

$$\Big\{ \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$$

Zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}\ a^x}{h} = a^x \lim \frac{a^h-1}{h} = \ln a \cdot a^x$$

TW. Załóżmy że $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $x \in (a,b)$. Wówczas $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$, $g(x) \neq 0$. są różniczkowalne w x do ;

$$1^\circ \; (f'+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$2^\circ \; (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$3^\circ \; \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Przykład c.d

$$6^\circ \; (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$7^\circ \; (ctgx)' = \left(\frac{1}{tgx}\right)' = \cancel{tgx} \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = +1 - ctg^2 x$$

TW.

Załóżmy, że f^{-1} (funkcja odwrotna) do $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, która jest ciągła. Niech $x_0 \in (a;b)$ $y_0 = f(x_0)$. Jeżeli $f'(x_0)$ istnieje i jest $\neq 0$ to

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad y_0 = f(x_0)$$

Przykład c.d

7° $$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{n\,y^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{\cancel{x-1}}_{n-1}}$$

8° $\log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{\ln a \; a^y} = \frac{1}{\ln a \, a^{\log_a x}} = \frac{1}{\ln a \cdot x}$$

Dla $x \in (-1,1)$

9° $$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\boxed{\cos y}_{>0}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

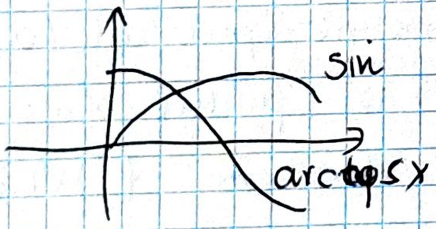
$\cos y > 0$ bo $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin^2(\arcsin x) = x^2$$

10° $$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{-\sin y} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin y > 0 \qquad y \in (0; \pi)$



11° $(\text{arctg}x)' = \frac{1}{(\text{tg}y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+(\text{tg}x)^2} = \frac{1}{1+(\text{tg arctg}x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

Tw

Niech funkcje $f:(a,b) \Longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad g:(c,d) \to \mathbb{R}$

$f:((a,b)) \to \subseteq (c,d)$

f jest rozniczkowalne w x_0

g —"— y_0, to złożenie $(\overset{g\circ f}{\cancel{f\circ g}})(x)$ jest też

rozniczkowalne w x_0

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

$$\boxed{(e^y)' = e^y}$$

Przykład c.d.

12°

$x^{\alpha} = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

$\{ g(y)=e^x, \ f(x)=\alpha\ln x \Rightarrow (g\circ f)(x) \}$

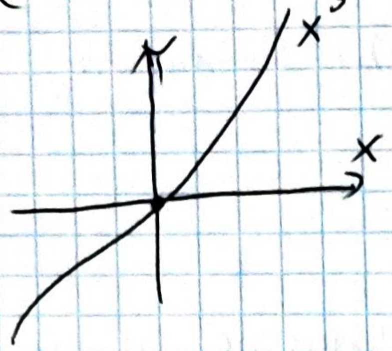
13° $x^x = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}) =$

$= x^x(\ln x + 1)$

Def Załóżmy, że f jest definiowane na przedziale (a,b) mówimy, że f ma min lokalne w punkcie $x_0 \in (a,b)$ jeżeli istnieje $\delta > 0$, taka, że ~~dla m~~ $f(x) \geq f(x_0)$ dla $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Mówimy, że f ma max lokalne w x_0, jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(x) \leq f(x_0)$ dla $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$x \longmapsto x^3$

$(x^3)' = 3x^2$

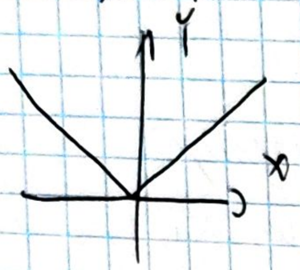


1° Pochodna w zerze równe 0

Punkt nie jest ekstremum

2° Ekstremum może być w punkcie nie ma pochodnej

$x \mapsto |x|$



Minima i maksima lokalne to ekstrema lokalne.

Jeśli w tych nierównościach $(f(x) > f(x_0))$ w $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $x \neq x_0$ to x_0 jest silnym minimum lokalnym.

W przypadku nierówności $(f(x) < f(x_0))$ to mówimy o silnym maximum lokalnym

Tw. (Fermat)

Jeżeli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w $x_0 \in (a,b)$ i f jest różniczkowalna w tym punkcie to pochodna w tym punkcie jest równa 0.

Dowód

Załóżmy, że f ma maksimum w x_0. Istnieje wówczas $\delta > 0$ taka że $f(x) \leq f(x_0)$ dla $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Jeżeli $a < x_0-\delta < x < x_0+\delta$

to

$$z = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Jeżeli $x_0 < x < x_0+\delta < b$,

to

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

F jest różniczkowalne w x_0 więc

$$f'(x_0) = \underset{\geq 0}{\lim_{x \to x_0^-} z} = \underset{\leq 0}{\lim_{x \to x_0^+} z}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 0$$

jedyna możliwość

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

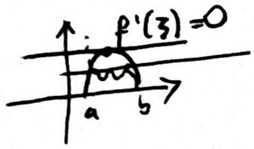
UWAGI:

TWIERDZENIE FERMATA nie mówi, że jeśli $f'(x_0) = 0$ to x_0 jest ekstremum!

Wykład - 8 Analiza matematyczna 17|12

Tw. (Rolle'a)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła oraz różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz niech $f(a) = f(b)$. Wówczas istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że $f'(\xi) = 0$



$f'(\xi) = 0$

Dowód

Jeżeli f jest stała, to $f'(x) = 0$

Jeżeli $f(x) > f(a)$ dla pewnego $x \in (a, b)$, to ~~znamy~~ na mocy twierdzenia Weierstrassa istnieje $\xi \in [a, b]$ taki, że $f(\xi) = \max\limits_{[a, b]} f(x)$

Musi być $\xi \neq a$, $\xi \neq b$ ponieważ $f(x) > f(a) = f(b)$ oraz $f(\xi) > f(x)$.

Punkt ξ jest ~~różniczkowalny~~ ekstremum oraz f jest różniczkowalna w ξ. Zatem na mocy T. Fermata $f'(\xi) = 0$

TW. (Lagrange) (Tw. o wartości średniej)

Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz różniczkowalna w (a,b) to istnieje punkt $\xi \in (a,b)$ taki, że $f(b)-f(a) =$
$= f'(\xi)(b-a)$

Dowód

Rozważmy funkcję

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Funkcja F jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna wewnątrz.

Zauważmy, że $F(a) = f(a) = F(b)$

Spełnione są więc założenia tw. Rolle'a. Zatem istnieje $\xi \in (a,b)$, taki że $F'(\xi)=0$.

Zatem $0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

czyli

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \text{c.n.d.}$$

Zauważmy, że jeśli $f'(x)=0$ dla $x \in (a,b)$ to f jest stała na mocy tw. Lagrange'a. Weźmy $x_1, x_2 \in (a,b)$. Wówczas

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1) = 0$$

Wniosek

Jeśli $f(g)$ określone na przedziale (a,b) mają równe pochodne na (a,b), to istnieje $c \in \mathbb{R} \wedge f(x) = g(x)+c, \ x \in (a,b)$

Wniosek

Jeśli pochodna funkcji f jest dodatnia na (a,b), to f jest rosnąca na (a,b)

Jeśli pochodna jest ujemna to f jest malejąca na (a,b)

Tw. Jeśli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna $f'(x_0)=0$ dla pewnego $x_0 \in (a,b)$ oraz pochodna funkcji f zmienia znak w x_0, to x_0 jest ekstremum.

Tw. (Cauchy)

Jeśli f, g są ciągłe różniczkowalne na przedziale $[a,b]$ oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$, to $\exists_{\xi \in (a,b)}$ taki, że $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Dowód

Rozważmy funkcję

$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

Funkcja h jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b). Mamy także $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$.

Możemy zastosować więc tw. Rolle'a. $\exists_{\xi \in (a,b)}$ taki, że $h'(\xi) = 0$.

to znaczy, że $f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$

Jeżeli f jest różniczkowalna na (a,b) oraz f' jest jej pocho

to możemy wyznaczyć jej pochodną, czyli $(f')' = f''$

Indukcyjnie def pochodną n-tych wzory $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Jeżeli f ma n pochodnych w (a,b) oraz są one ciągłe w (a,b) to mówimy, że f jest klasy $C^{(n)}$ na przedziale (a,b).

Wystarczy udowodnić, że $f^{(n)}$ jest ciągła

Przykłady

a) e^x

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

b) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

$$(\sin x)' = (\cos x)$$

$$(\sin x)' = (\cos x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

Załóżmy, że $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Wykaż $(\sin x)^{(n+1)} = ?$

$$\left((\sin x)^{(n+1)}\right) = \left((\sin x)^{(n)}\right)' = \left(\sin(x+n\tfrac{\pi}{2})\right)' =$$

$$= \cos(x+n\tfrac{\pi}{2}) = \sin(x+(n-1)\tfrac{\pi}{2})$$

c) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\frac{\pi}{2})$

d) $\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(x-1)\cdot\ldots(\alpha-n-1)$
$x^{\alpha-n}$

$x>-1, \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n=1,2\ldots$

Rozważ wielomian

$$P_n(x_0,x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$f(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$

$f(x) = P_n(x_0,x) + r_n(x_0,x)$

Tw. Załóżmy, że f ma ~~ciągłe~~ ciągłą pochodną $[x_0,x]$ do rzędu n oraz $(n+1)$-pochodna jest zdefiniowana w (x_0,x). Wówczas dla funkcji φ ciągłej w tym przedziale o niezerowej pochodnej we wnętrzu (x_0,x) $\exists$ takie, że ~~$r_n(x_0,x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{f'\varphi(\xi)n!}$~~
$\xi\in(x_0,x)$

$$r_n(x_0,x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

Niech $\varphi(t) = x-t$, wówczas

$$r_n(x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \Longrightarrow$$ reszta w postaci Cauchy'ego.

Niech $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Wstawiamy na mocy twierdzenia

$$r_n(x_0,x) = \frac{\cancel{\varphi}}{\cancel{\varphi}}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-\xi)^n = \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!\,f(x-\xi)^{n-1}} f^{(n-1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \Longrightarrow$$ Reszta w postaci Lagrange'a.

Zatem $f(x)=f(x)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-}{(n+1)!}$

Jeśli ~~$f(x_0)$~~ $x_0=0$, to wzór Taylora nazywamy wzorem Maclaurena.

Jeśli $n=0$ to ~~my~~ mamy $f(x)\cdot f\overline{(x_0)} = f'(\xi)(x-x_0)$

Przykład

a) $e^x = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0)+\frac{e^0}{n!}(x-0)^n + r_n(0,x)$

gdzie $r_n(0,x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1}$, czyli

$$e^x = \underbrace{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}}+\boxed{\frac{e^{\xi}}{(n-1)!}x^{n-1}}$$ błąd

$\xi\in(0,x)$

b) $\sin x$

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\frac{\pi}{2})$

$(\sin x)^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}$

Co więcej,

$$r_n(0,x) = \frac{1}{(n+1)!} \sin\left(\xi + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) x^{n-1}$$

W rezultacie

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r.$$

Podobnie $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2k-1}, \text{ gdzie}$$

$$r_{2k+1}(0,x) = \frac{\cancel{\cos}\,\cos\left(\xi + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k-1)!} x^{2k+1}$$

Tw. Załóżmy że f ma n pochodnych w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz n-ta pochodna jest ciągła x_0. Wówczas jeśli $f'(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Wówczas jeśli to

(1) n jest <u>parzyste</u> to f ma ekstremum w x_0 i jest max, jeśli $f^{(n)}(x_0) < 0$

(2) min gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$

(3) n jest <u>nieparzyste</u>, to f nie ma ekstremum w punkcie x_0.

Przykł.

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6 > 0$

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, Ekst. nie istnieje.

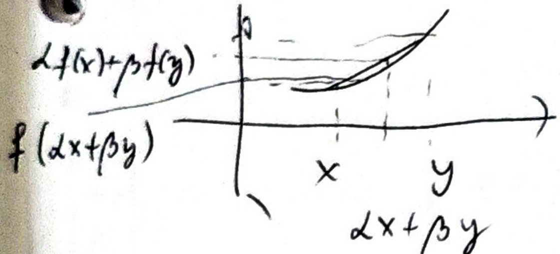
Def. Załóżmy, że $f(a,b) \to \mathbb{R}$ mówimy, że f jest wypukła na przedziale (a,b), jeżeli dla dowolnego $(x,y) \in (a,b)$ oraz α i $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$

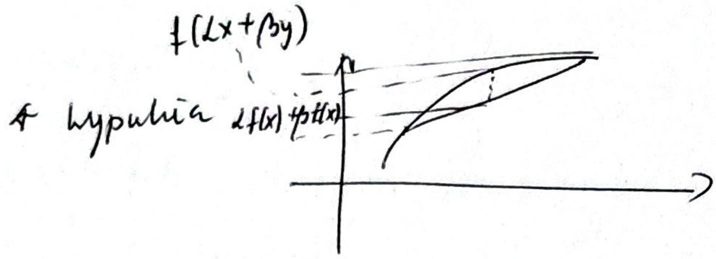
Zachodzi

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Jeżeli $f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y)$, to mówimy że f jest wklęsła.

Jeśli, nierówność jest ostra to mówimy o silnej wypukłości lub wklęsłości





Jeżeli f jest wypukła na (a,b) to f jest ciągła (a,b)

Tw. Funkcja różniczkowalna $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła $(a,b) \iff$ gdy jej pochodna f' jest niemalejąca na (a,b). Funkcja f jest silnie wypukła jeżeli pochodna jest rosnąca.

Wniosek

Jeżeli f jest dwukrotnie różniczkowalna na (a,b), to f jest wypukła $\iff f'' \geq 0$.

Jeżeli $f''(x) > 0$, to f jest silnie wypukła.

Tw. Różniczkowalna funkcja $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ jest silnie wypukła, gdy jej wykres leży powyżej każdej stycznej do wykresu.

Wykład 9 - Analiza matematyczna 9.01.2019.

CAŁKI ~ WSTĘP

Def. Załóżmy że funkcja f jest zdefiniowana na pewnym przedziale I $f: I \to \mathbb{R}$. Każda funkcja $F: I \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek $F'(x)=f(x), x\in I$ nazywamy funkcją pierwotną f.

Załóżmy że jeżeli F jest funkcją pierwotną f, to $F+C$, $C\in\mathbb{R}$ jest także funkcją pierwotną f.

Jeżeli F i G są funkcjami pierwotnymi f to $(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=$

$= f(x) - f(x) = 0$

Zatem $F-G = \cancel{0}\; C = \text{const.}$

Tw. Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to f jest ciągłą f. pierwotna.

Funkcję pierwotną f nazywamy całką nieoznaczoną i oznaczamy $\int f(x)\,dx$

Innymi słowy,

$(\int f\,dx)' = f$; co więcej, $\int F'\,dx = F + C$, $C\in\mathbb{R}$.

Jeżeli u i v są funkcjami określonymi na przedziale I i mają na tym przedziale funkcje pierwotne na I, to

$$\int (\alpha v+\beta v)\,dx = \alpha\int v\,dx + \beta\int v\,dx$$

Innymi słowy $\alpha v+\beta v$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną i całka nieoznaczona jest liniowa.

Mamy

$$(uv')(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

Zatem

$$u(x)\,v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x) \quad / \int$$

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = \int (uv)'(x)\,dx - \int u'(x)\,v(x)\,dx =$$

$$= u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

~~ttfd~~

WZÓR PRZEZ CZĘŚCI

Załóżmy, że $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ na przedziale I_x.

Niech $\varphi : I_t \to I_x$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym

Wówczas $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

Zatem

$$\int(F(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int (F(\varphi(t)))'\,dt = F(\varphi(t)) + c$$

To oznacza, że $\int F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int F(g\,\varphi(t)))\,dt =$

$$= \int F(x)\,dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + c$$

WZÓR PRZEZ PODSTAWIENIEM.

Przykłady

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

Te wzory zachodzą na każdym przedziale, na którym określona jest funkcja podcałkowa.

Stała zależy od przedziału

Wyliczymy : $\int uv' = uv - \int u'v.$

a) $\int \ln x \; dx$ cyści

$u(x) = \ln x \qquad v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = x$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

b) $\int tg x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ Podst

$t = \cos x.$

$dt = -\sin x \, dx$

$-dt = \sin x \, dx$

Zatem $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$

c) $\int \arcsin x dx$ częśći

$u(x) = \arcsin x$ ~~dt~~ $\quad v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v(x) = x$

$$\int \arcsin x \, dx = \arcsin x \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x \overset{*}{=}$$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ podst

~~$u(x)$~~ $=$ $t = 1-x^2$

~~$u'(x) =$~~ $dt = -2x \, dx$

$-\frac{dt}{2} = x \, dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} + c = -t^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\overset{*}{=} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C .$$

d) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

$u(x) = \operatorname{arctg} x \qquad v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad v(x) = x$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \overset{*}{=}$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$t = 1+x^2$

$dt = (1+x^2)' \, dx$

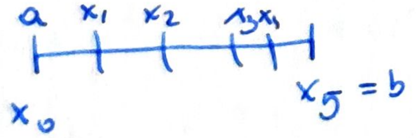
$dt = 2x \, dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2} dt$

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

$$\overset{*}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c$$

Teraz zdefiniujemy całkę Riemanna (całkę oznaczoną)

Def. Niech $[a,b]$ będzie przedziałem. Podział przedziału $[a,b]$ oznaczenie P, to dowolny skończony układ punktów $\{x_0, x_1 \dots x_n\}$ taki, że $a = x_0 < \dots < x_n = b$



$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a,b]$

Definiujemy

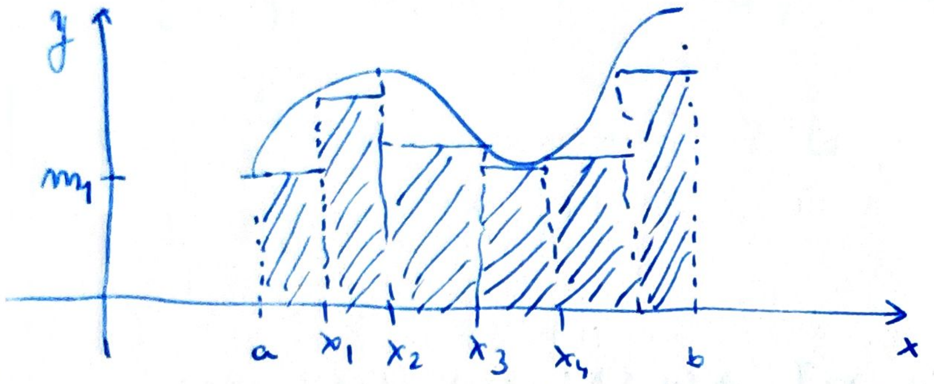
$$M_j = \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \qquad m_j = \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x)$$

Dla podziału P podziału $[a,b]$ definiujemy $U(f;P) = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j$

górna suma całkowa

$L(f;P) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j$

dolna suma całkowa



Definiujemy liczby $\int_a^b f(x)dx = \inf U(f;P)$ => niby górne a bierzemy inf

$\int_a^b f(x)dx = \sup L(f;P)$ => niby dolne a bierzemy sup

∇ jak gdyby ○ na odwrót

Inf i sup są brane po wszystkich podziałach P przedziału $[a,b]$.

Te liczby nazywamy są górną i dolną całką funkcji f po podziale $[a,b]$.

Jeżeli te dwie ~~funkcje~~ liczby są równe to funkcję f nazywamy całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$, a wspólną wartość całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$

Zakładamy, że funkcja f jest ograniczona, czyli $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a,b]$

Zatem $L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta_j \leq M \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = M((b - \cancel{x_{n-1}}) + (\cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}}) + (\cancel{x_1} - a) =$

$= M(b-a)$

Podobnie

$$L(f, \mathcal{P}) \geq m(b-a)$$

oraz

$$M(b-a) \geq U(f, \mathcal{P}) \geq m(b-a)$$

W konsekwencji zbiory $\{L(f;\mathcal{P})$ $\mathcal{P}$ podział $[a,b]\}$

$\{U(f;\mathcal{P})$ –ll– $\}$

Są ograniczone. Mają więc sup i inf

Nie każda funkcja jest całkowalna.

Przykład

Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q \end{cases}$$

W każdym przedziale $[x_{j-1}, x_j]$, $x_{j-1} < x_j$ jest liczba wymierna i liczba niewymierna. Zatem $m_j = 0$ $M_j = 1$

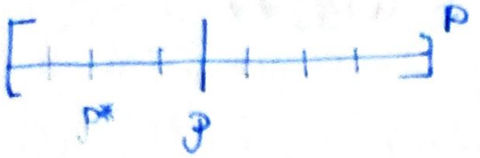
W konsekwencji dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ $L(f;\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j = 0$

$$U(f;\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \cancel{m} M_j \Delta x_j = 1$$

$U(f, \mathcal{P}) \neq L(f, \mathcal{P}) \implies$ Ta funkcja nie jest całkowalna.

Def. Podpodziałem $\mathcal{P}^*$ podziału $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ nazywamy dowolny podział taki, że $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*$.

Jnnymi słowy, każdy punkt podziału $\mathcal{P}$ jest także punktem Podziału $\mathcal{P}^*$



Niech $\mathcal{P}_1$ oraz $\mathcal{P}_2$ będą podziałami $[a,b]$. Wówczas $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ jest wspólnym podpodziałem zarówno $\mathcal{P}_1$, jak i $\mathcal{P}_2$.

$\{x_0=y_0,\ x_1,\ y_1,\ x_2=y_2\} \Rightarrow$ jest podpodziałem zarówno $\mathcal{P}_1$ jak i $\mathcal{P}_2$.

Jeśli $\mathcal{P}^*$ jest podpodziałem $\mathcal{P}$ to .

$$L(f,\mathcal{P}) \leq L(f;\mathcal{P}^*)$$

$$U(f,\mathcal{P}^*) \leq U(f;\mathcal{P})$$

To oznacza, że jeśli f jest funkcją ograniczoną, to dolna suma całkowa $\left(\underline{\int_a} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \right)$

Tw. (Kryterium całkowalności)

Ograniczona funkcja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna $[a,b]$ jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ taki, że $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$

Dowód. Dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ mamy

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f,\mathcal{P})$$

Jeśli dla pewnego podziału $\mathcal{P}$

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon \text{ , to}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x) < \varepsilon$$

Na mocy założenie dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon$$

Musi więc być

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Zatem f jest całkowalna.

Załóżmy, że f jest całkowana na przedziale $[a,b]$

Zatem

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Z def. sup. dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{P}_1$ taki, że

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,\mathcal{P}_1)$$

Z def. inf. dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{P}_2$

taki, że $U(f,\mathcal{P}_2) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$

Niech $\mathcal{P}$ będzie wspólnym podpodziałem $\mathcal{P}_1$ oraz $\mathcal{P}_2$. Wówczas

$$U(f,\mathcal{P}) \leqslant U(f,\mathcal{P}_2) < \int_a^b f(x)dx < L(f,\mathcal{P}_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(f,\mathcal{P}) + \varepsilon$$

Def. Dla dowolnego podziału $\mathcal{P}$ równego $\{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ liczbę $\mu(\mathcal{P}) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta x_j$ nazywamy średnicą podziału $\mathcal{P}$.

Tw. Funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ jest na nim całkowalna w sensie Riemanna. (oznaczona)

Analiza matematyczna (14.01)

TW. Funkcja monotoniczna jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$

Dowód. Załóżmy, że f jest niemalejąca na $[a,b]$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na podprzedziały równej długości o długości $\frac{b-a}{n}$, ponieważ f jest niemalejąca, to ~~sup~~ (def. $M_j = \sup f(x)$) $M_j = f(x_j)$, $m_j = f(x_{j-1})$ $j = 1 \dots n$.

Zatem
$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\frac{b-a}{n}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))\frac{b-a}{n}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n}\Big(f(b) - \cancel{f(x_{n-1})} + \cancel{f(x_{n-1})} - \cancel{f(x_{n-2})} + \cancel{f(x_{n-2})}$$
$$+ \dots + \cancel{f(n)} - f(a)\Big)$$
$$= f(b) - f(a) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Możemy dobrać n tak, aby $U(f,P) - L(f,P) = (f(b) - f(a)\frac{b-a}{n} < \varepsilon$

Zatem z kryt. ~~Riemanna~~ całkowalności f jest całkow. w sensie Riemanna.

TW. Jeżeli f, g są całkowite na $[a,b]$ to $f+g$, λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ są całkowite w sensie Riemanna na $[a,b]$.

oraz
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

TW. Jeżeli f,g są całkowite na [a,b] oraz f(x) ≤ g(x) dla x∈ [a,b] to

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

TW. Jeżeli f,g są całkowalne na f,[a,b], to f,g jest całkowalny. Co więcej, |f| jest funkcją całkowalną oraz

$$\left|\int_a^b (x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

TW. Jeżeli a<c<b

f:[a,b] → ℝ , to f jest całkowalne na [a,b] ⟺ f jest całkowalne na każdych wnętrzach [a,c] i [c,b].

Co więcej,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Wniosek

Jeżeli f:[a,b] → ℝ jest całkowalne, to dla dowolnych $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. f jest całkowalne na $[\alpha,\beta]$.

TW. Jeżeli f,g : [a,b] ⇒ ℝ są równe z wyjątkiem skończenie wielu punktów to jeżeli jedna z tych funkcji jest całkowalne na [a,b] to drugo także, co więcej

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Wniosek

Niech f będzie ograniczone na [a,b], jeżeli f jest całkowalne na [a,b] gdy określimy w pewien sposób wartości f(a) i f(b) to f jest całkowalne dla każdych wartości f(a) i f(b) całka ma tą samą wartości.

Jeżeli f jest całkowalne na przedziale ~~otwartym~~ $[a,b]$ oraz $x \in [a,b]$ to funkcja $F: [a,b] \to R$ określona wzorem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Jeżeli f jest ciągła w punkcie x_0 to F jest różniczkowalne w tym punkcie.

Dowód

Niech $x, y \in [a,b]$ oraz $|f(x)| = M$ dla $x \in [a,b]$.

$$|F(y) - F(a)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_y^x f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} \right| =$$

$$= \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \Rightarrow \int_y^x f(t)\,dt \le \overset{*}{M} - \int_x^y dt = M(y-x) \quad ?$$

Jeżeli $|y-x| < \frac{\varepsilon}{M}$, to $|F(y) - F(x)| \le$

to dowodnie znaczy, że F jest ciągła.

Załóżmy, że f jest ~~prosta~~ ciągła w $x_0 \in [a,b]$

Zatem istnieje $\delta > 0$ takie, że $|x - x_0| < \delta$ to $|f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.

Rozważmy równanie ilorazu różnicowego

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| =$$

$$= \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0) = \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - f(x_0) \frac{1}{x_0 - x_0} \int dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt \right| \le \frac{1}{|x-x_0|} \int_x^{x_0} |f(t) - f($$

$$\leq \frac{1}{|x-x_0|} \varepsilon \int_{x_0}^{x} dt$$

$$= \varepsilon \quad , \text{ jeżeli } |x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0$$

To znaczy, że

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Wniosek

Funkcje

TW Niech f będzie całkowalna na $[a,b]$ (Newton-Leibniz)
Jeżeli istnieje ~~różnowa~~ różniczkowalna funkcja
$F: [a,b] \to \mathbb{R}$ taka, że $F'(x) = f(x)$
dla $x \in [a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Dowód Niech $\varepsilon > 0$ będzie ustaloną liczbą, ponieważ f jest ~~różniczko~~ całkowalna na $[a,b]$, to $\exists$ podział $\mathcal{P}$ podprzedziałów $[a,b]$ taki, że $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$.

Zatem

$$U(f,\mathcal{P}) < \varepsilon + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon + L(f,\mathcal{P}) \quad (*)$$

Z. twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej $\exists$

pkt. ξ_j, $j=1, n$, $x_{j-1} \leqslant \xi < x$ takie, że

$$F(x_j) - F'(x_{j-1}) = F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Zatem górn $U(L, P)$

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} \left(F(x_j) - F(x_{j-1}) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f(\xi_j)}_{\leqslant M_j} (x_j - x_{j-1})$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1})$$

$$= U(f, P) \leqslant \varepsilon + \int_a^b f(x)\,dx$$

Podobnie

$$F(b) - F(a) \geqslant \sum_{j=1}^{n} L(f, P) > -\varepsilon + \int_a^b f(x)\,dx$$

Zatem

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

<u>TW</u> (całkowanie przez części)

Załóżmy, że pochodne funkcji u oraz v są całkow. na przedziale $[a, b]$, wówczas

$$\int_a^b u(x)\, v'(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

Symbol $u(x)\,v(x)\Big|_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$

<u>Dowód</u> Mamy

$$(vu)'(x) = u'(x)\, v(x) + v(x)\, v'(x) \quad \Big| \int_a^b$$

Zatem

$$\int_a^b (uv)'(x) = \int_a^b u'(x)\, v(x) + \int_a u(x)\, v'(x)$$

Z wzoru New-Leib.

$$\int_a^b (uv)'(x) = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)$$

Jeżeli f ma ciągłe pochodne do rzędu (n+1) na przedziale [ab] to

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x)$$

gdzie

$$r_n(x_0, x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\, dt$$

Dowód ze wzoru New-Leibniza

$x > x_0$ $\quad f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt =$

$$= \int_{x_0}^{x} \underset{u}{f'(t)}\, \underset{v'}{(x-t)'}\, dt$$

$$= -f'(t)\,(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)\,(x-t)\, dt =$$

$$= -f'(x)\,(x-x) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\,(x-t)\, dt$$

$$= f'(x_0)\,(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\, \underbrace{(x-t)}_{u'}\, dt$$

$$= f(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f''(t)\left((x-t)^2\right)' dt$$

$$= f(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}\cancel{\int_{x_0}^{x}} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

~~$= f(x_0$~~ Podobnie robimy to n-krotnie otrzymujemy

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)dt.$$

Tw. (Zamiana zmiennych)

Jeżeli $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła i $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha,\beta]$ oraz $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Dowód

Ponieważ f, g są ciągłe, φ' jest ciągłe, to obie całki istnieją. Jeżeli F jest f. pierwotną f, czyli $F' = f$, to $F \circ \varphi$ jest f. pierwotną, ~~czyli~~ $(\underset{f}{\cancel{F}} \circ \varphi)\varphi'$

Zatem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad (\text{tw. New-Leib})$$

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$\int_\alpha^\beta (\cancel{\alpha} f\circ\varphi)\varphi'\,dt = F(b) - F(a)$$

Ten fakt można wzmocnić

Tw: Niech $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ będzie ściśle rosnącą i niech φ' będzie całkowalne na $[\alpha,\beta]$. Wówczas dla dowolnej funkcji całkowal. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(f \circ g)\varphi'$ jest całkowal. $[\alpha,\beta]$ oraz

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Przykład

a) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{*}{=}$

Niech $x = a\sin t$

$x: [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow [a\ a]$

$x(0)=0$, $x(\frac{\pi}{2})=a$

$x'(t) = a\cos t$

$$\overset{*}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

$\cos 2t = \cos^2 t - (1-\cos^2 t)$

$= 2\cos^2 t + 1$

$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

o wartości średniej do rachunku całkowego.

Tw. Niech f, g będą całkowalne na przedziale $[a, b]$ co więcej,

niech $m = \inf \{ f(x),\ a \leq x \leq b \}$

$M = \sup \{ f(x),\ a \leq x \leq b \}$

Jeśli f jest nie-ujemne na $[a, b]$ to istnieje liczba $\mu \in [m, M]$ taką, $\int_a^b fg(x)\,dx = \mu\left(\int_a^b g(x)\,dx \right)$

Jeśli f jest dod. ciągłe na $[m, M]$ to istnieje $\xi \in [a, b]$ takie że

$$\int_a^b fg(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

Matematyka (ANAL) 21/01

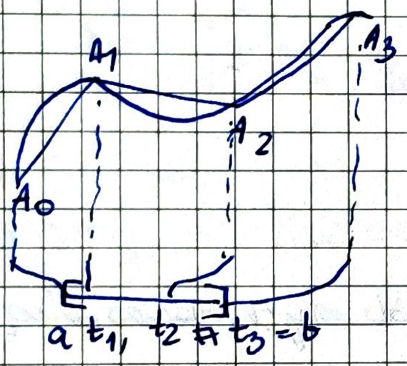
Def. Krzywa w $\mathbb{R}^3$ to ciągłe odwzorowanie $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Zatem $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ oraz $x, y, z : [a,b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe

Punkt $(x(a), y(a), z(a)) = \Gamma(a)$ to początek krzywej

punkt $(x(b), y(b), z(b) = \Gamma(b)$ to koniec — II —.

Krzywą nazywamy zamkniętą $\iff \Gamma(a) = \Gamma(b)$

Krzywą $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ nazywamy łukiem, jeśli odwzorowanie Γ jest różnowartościowe. Krzywa nazywa się krzywą gładką klasy C^1, jeśli f. x, y, z są różniczkowalne w sp. ciągły. Jeśli $\Gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ nigdzie nie przyjmuje wartości 0, to Γ nazywamy krzywą gładką. Niech $\Gamma : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$, będzie krzywą gładką. Weźmy dow. podział odcinka $[a,b]$ $a = t_0 < t_1 < \ldots t_n = b$ Niech $A_i = \Gamma(t_i)$, $i = 0, \ldots n$. Rozważmy wielokąt $A_0, A_1 \ldots A_n$



Def Jeśli $\sup \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|A_{i-1} A_i|}_{\text{dł. odcinka } A_{i-1} A_i}$ brane po wszystkich podziałach $a = t_0 < t_1 \ldots t_n = b$ odcinka $[a,b]$ jest skończone to możemy mówić że długość krzywej Γ jest skończona.

Liczbę $l(\Gamma) = \sup \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1} A_i|$ nazywamy dł. krzywej.

Tw. Jeśli $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ jest gładkim łukiem, to ma skończoną dł. (jest prostowalna) oraz

$$\ell(r) \int_a^b \left(\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2 t + (z')^2 t}\; dt \right)$$

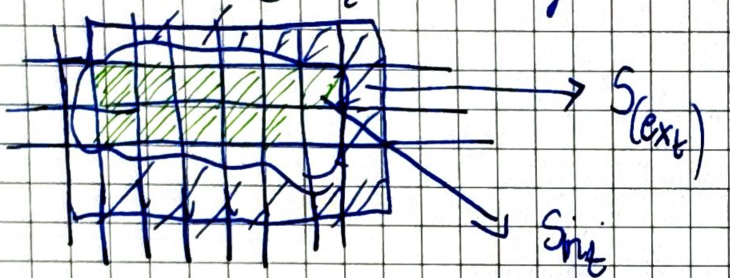
Jeśli r jest płaska, czyli leży w pewnej płaszczyźnie, to możemy przyjąć, że $z = 0$. Wówczas $\ell(r) = \int_a^b (\sqrt{(x(t))^2 + (y')^2(t) + (z')^2 t}\; dt$.

Jeśli r jest wykresem funkcji, czyli postać $(x, f(x))$, $x \in [a,b]$ to

$$\ell(r) = \int_a^b \left(\sqrt{1 + (f')^2(x)}\; dx \right)$$

Obliczanie pola powierzchni

Podzielmy płaszczyznę liniami (prostymi) równoległymi do osi współrzędnych. Nazwijmy ten podział płaszczyzny Π. Niech D będzie ograniczonym zbiorem.



Przez $S_{int}(D, \Pi)$ oznaczamy sumę pól tych prostokątów podziału Π są zawarte w D.

Przez $S_{ext}(D, \Pi)$ oznaczamy sumę pól tych prostokątów podziału Π, które mają niepusty ~~zbiór~~ przekrój z D.

Oczywiście $S_{int}(D, \Pi) \leqslant S_{ext}(D, \Pi)$

$$S_{int} = \sup_{\Pi} (S_{int}(D, \Pi)$$

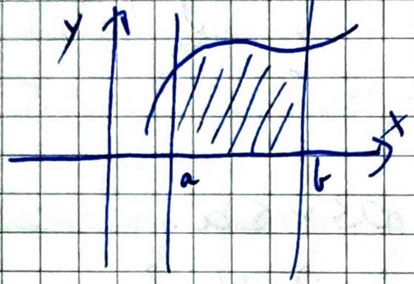
$$S_{ext} = \inf_{\Pi} (S_{ext}(D, \Pi)$$

Jeżeli $S_{int} = S_{ext}$ to jest polem obszaru (zbioru) $\mathcal{D}$ i oznaczamy $S(\mathcal{D})$.

Jeżeli $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ to $(S(\mathcal{D}_1)) \leq S(\mathcal{D}_2)$ jeżeli istnieją te liczby. Jeżeli

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset \quad \text{to} \quad S(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(\mathcal{D}_1) + S(\mathcal{D}_2)$$

Rozważmy zbiór ograniczony osią Ox, prostymi $x=a$, $x=b$ oraz wykres funkcji $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$.



Obszar ten nazywamy trapezem krzywoliniowym. Jeżeli f jest całkowalna to pole tego zbioru istnieje i jest równe

$$S(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład

Niech

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, będzie elipsą. Wyznaczymy pole obszaru tą elipsą.

Wystarczy założyć, że $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$ - obszar jest bowiem symetryczny osi współ.

$$S = 4\int_0^a \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

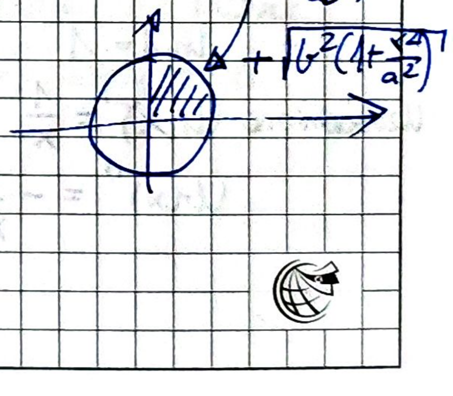
$x = a\sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$dx = a\cos t\,dt$

$$S = 4ba\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,dt$$

$$S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,dt$$

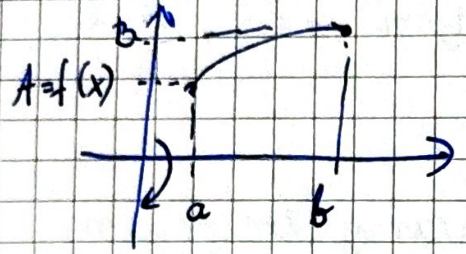


$\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

$\overset{*}{=} 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt = \pi ab.$

Załóżmy, że f jest całkowalna i nieujemna oraz $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Załóżmy, także, że trapez krzywoliniowy abBA, $A=f(a)$, $B=f(b)$



Obraca się wokół osi OX. Objętość takiej powstałej bryły to $V(B)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

Przykład

Zakładamy, że krzywa $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $0\le x\le a$.

Oraz obraca się o OX. (powstaje elipsoida) $V=?$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$V=\pi\int_a^b b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Jeśli $a=b=R$ to otrzymujemy objętość kuli $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Pokażemy teraz jak zdefiniować logarytm i funkcję wykładniczą przy pomocy całek.

Definiujemy dla $0\le x\le\infty$

$$\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

$$\ln 1 = 1$$

Uzasadnione $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$$(\ln x)''=-\frac{1}{x^2}$$

Tw. Jeżeli $x, y > 0$ oraz $r \in \mathbb{Q}$ to

a) $\ln xy = \ln x + \ln y$,

b) $\ln x^r = r \ln x$

Dowód $y > 0$, rozważmy funkcję $f(x) = \ln xy - \ln x$

Wówczas

a) $f'(x) = \frac{1}{xy} \cdot y - \frac{1}{x} = 0$ $\Rightarrow$ Zatem f jest funkcją stałą $f(x) = \text{const}$.

Zauważmy, że $f(1) = \ln 1y - \log_n 1 = \ln y$

Zatem dla dowolnego $x > 0$. $\ln xy - \ln x = \ln y$ cnd

b) Rozważmy funkcję $g(x) = \ln x^r - r \ln x$

Wówczas $g'(x) = \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} - r \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ zatem $g(x)$ jest const

Zatem $g(x) \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow \ln x^r = r \ln x$. cnd

Zauważmy, że

$\ln x \to \infty, \quad x \to +\infty$

! $\ln x \to -\infty, \quad x \to \cancel{-\infty}\ 0$

Logarytm jest funkcją ściśle rosnącą. Jest więc różnowartościow

istnieje więc funkcje odwrotne.

Tę funkcję oznacza się przez $\exp x = e^x$ Innymi słowy,

$y = \exp x \Leftrightarrow x = \ln y$.

Logarytm przyjmuje wartości w $(-\infty; \infty)$ na zbiorze $(0, \infty)$

Z tego wynika, że f wykładnicza jest określona na zbiorze na $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$ i przyjmuje wartości w $(0, \infty)$ Mamy także

$(\exp x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp x$.

TW Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$, to

a) $\exp(x+r) = (\exp x)(\exp y)$

b) $\exp(rx) = (\exp x)^r$

Dowód: Niech $X = \exp x$, $Y = \exp y$, wówczas

$\ln XY = \ln X + \ln Y = x+y$

$\exp(\ln XY) = \exp(x+y)$

$XY = \exp(x+y)$

$\exp x \exp y = \exp(x+y)$

Jeżeli $a>0$, to definiujemy $a^x = \exp(x \ln a)$

$\exp(\ln a^x) = a^x$

Jeżeli $a, b > 0$ $x, y \in \mathbb{R}$, to

a) $a^{x+y} = a^x a^y$

b) $(ab)^x = a^x b^x$

c) $(a^{-x}) = \frac{1}{a^x}$

d) $(a^x)^y = a^{xy}$

Dowód

a) $a^{x+y} = a^x a^y$

$L = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a + y \ln a) =$

$= \exp(x \ln a) * \exp(y \ln a) = a^x a^y = P$ cnd.

b) $(ab)^x = a^x b^x$

$L = \exp(x \ln ab) = \exp(x((\ln a)+(\ln b))) =$

$\exp(x \ln a) + \exp(\ln b) = a^x b^x = P$ cnd.

c) $(a^{-x}) = \frac{1}{a^x}$

$L = \frac{1}{\exp(x \ln a)} = \frac{1}{a^x} = \frac{\cancel{1}}{}$ cnd.

d) $a^{xy} = \exp(\ln xy\ln a) = \exp(y(x\ln a)) = \exp(y \ln \underbrace{\exp(x\ln a)}_{a^x}) =$

$= \exp(y(\ln a^x) = (a^x)^y$

Zauważmy, także

$$(a^x)' = (\exp(x\ln a)) = \exp(x\ln a)\cdot\ln a = \ln a\cdot a^x.$$

Poprzednio rozważaliśmy

$$\operatorname{Exp} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Teraz będziemy badać ciągi i szeregi funkcji

Def Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji zdefiniowanych na zbiorze $E \subset \mathbb{R}$. Jeżeli dla każdego $x \in E$ $\exists$ liczba $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, to definiujemy nową funkcję $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $x \in E$.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zbiega dla każdej liczby $x\in E$ to def.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

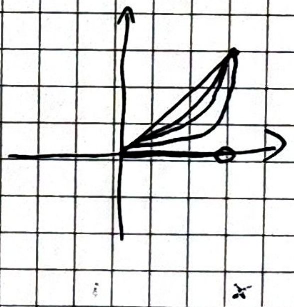
Przykład

$f_n : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n \quad n\in\mathbb{N}$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

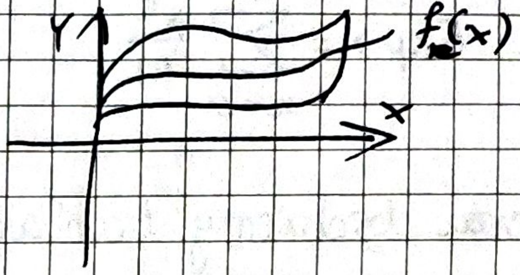


Zauważmy, że granica ciągu funkcji ciągłych może ~~to~~ nie być funkcją ciągłą.

Def Załóżmy, że dany jest ciąg f_n, $f_n : E \to \mathbb{R}$ oraz, że f będzie granicą tego ciągu. Mówimy, że ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie jeśli dla funkcji f jeśli $\forall$ liczby $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, że dla $n > N$ zachodzi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Innymi słowy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{N \in \mathbb{N}} \; \forall_{x \in E} \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$



Def Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zbiega jednostajnie, jeśli ciąg sum częściowych $\sum_{k=1}^{n} f_n(x)$ jest zb. jednostajnie.

Tw. Niech granica $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$.
oraz niech

$$M_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| ; x \in E \}$$

Wówczas $f_n \to f$ jednostajnie na E $\Leftrightarrow$ $M_n \to 0, n \to \infty$.

24/01

$E \subset \mathbb{R}$

$f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Jeśli $\forall_{x \in E}$ $f_n(x)$ jest zbieżne, to definiujemy funkcję $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

f jest punktowo granicą f_n.

DEF

ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na zbiorze E,

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \forall_{x \in E} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

TW Niech $E \subset \mathbb{R}$ oraz $f_n \to f$ (jednostajnie na zb. E) $f_n, f : E \to \mathbb{R}$

Niech $x \in E$ oraz $\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n$. Wówczas ciąg A_n jest zbieżny oraz

granica przy $\overset{\lim f(t)}{t \to x} = \lim_{n \to \infty} A_n$.

Innymi słowy, $\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t)$

Jednostajna zbieżność $\Rightarrow$ można zamienić kolejność granic.

TW Jeśli f_n jest ciągiem funkcji ciągłych z E w $\mathbb{R}$ zbieżnym jednostajnie do funkcji f, to f jest funkcją ciągłą na E.

Przypomnimy przykład

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$ Granica (pkt)

$$f = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Funkcja f nie jest funkcją ciągłą na [0,1], chociaż f_n są ciągłe

Zatem f_n nie zbiega jednostajnie.

TW. Załóżmy, że f_n jest ciągiem funkcji różniczkowalnym na [a,b]. takim, że $f_n(x_0)$ zbiega do pewnego $x_0 \in [a,b]$. Jeśli ciąg (f_n') zbiega jednostajnie wówczas ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji różniczkowalnej f oraz pochodna tej funkcji

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad ; \quad x_1 \in E$$

TW. Załóżmy, że funkcje f_n są całkowalne na przedziale f [a,b] oraz f_n zbiega jed. do funkcji f na [a,b].

Wówczas f jest całkowalna oraz

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_u^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

DEF. Niech c_n będzie ciągiem liczb (zespolonych). Szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0 nazywamy następujący szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_1 (x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots$$

TW. (Cauchy'ego - Hadamard)

Niech dany będzie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ oraz niech

$$\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$R = \begin{cases} \infty \;; & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} \;; & 0 < \alpha < \infty \\ 0 \;; & \alpha = \infty \end{cases}$$

Wówczas szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny bezwzględnie w kole $|x-x_0|<R$, rozbieżny $|x-x_0|>R$. Jeżeli $0<r<R$, to szereg

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ zbiega jednostajnie

Z tego tw. wynika, że szereg potęgowy możemy różniczkować i całkować wyraz po wyrazie.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_1 (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n (x-x_0)^{n-1}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

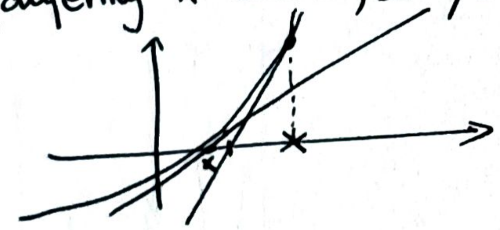
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Mamy funk. $f(x)=0$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, dwukrotnie różniczkowalne. Zakładamy teraz że f'' jest stałego znaku $[a,b]$. Zakładamy także $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków. Niech $f(b)$ będzie tego samego znaku co $f''(x)$. Wyznaczamy styczną* do wykresu funkcji f w punkcie $(b, f(b))$

$$y - f(b) = f'(b)(x-b)$$

Znajdujemy x takie, że $y=0$



$\Longrightarrow$ zatem $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$

W następnym kroku prowadzimy styczną w $(x_1, f(x_1))$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ten proces kontynuujemy

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(n)}{f'(n)}$$

Tw Załóżmy, że $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

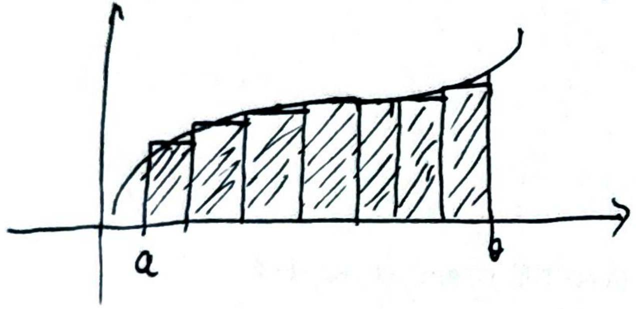
(1) $f(a)$, $f(b)$ są różnych znaków

(2) $f''(x)$ jest ciągła oraz stałego znaku na $[a,b]$.

(3) Styczne do wykresu funkcji f w punktach a i b przecinają oś OX w przedziale $[a,b]$.

Wówczas $f(x)=0$ ma dokładnie jeden pierwiastek w $[a,b]$ metoda Newtona jest zbieżna do tego pierwiastka.

Zał. że $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona. Chcemy wyznaczyć „$\approx$" $\int_a^b f(x)\,dx$.
Najprostsza metoda to metoda prostokątów.



Dzielimy przedział $[a,b]$ na podprzedziały równej dł. i liczymy Σ.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \Delta \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x-x_{1-1}}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$x = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 1 \ldots n$$

Oszacowanie błędu

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_1 + x_{n-1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4n}\, \underset{\underset{t \in [a,b]}{\sup} |f'(t)|}{\underset{\shortparallel}{\|f'\|_\infty}}$$

Poszybsienie tej metody to użyć trapezy zamiast prostokątów

„$\sim$" $\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f\ldots + \frac{1}{2}f_n\right)$

$f_i = f(a+ih) \quad i = 1 \ldots n$

BŁĄD $\leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f''\|_\infty$