ANALIZA MAT - Ć

ZBIGNIEW BŁASZCZYK

B1-11 WT - 12-13

CZW - 9-10

błaszczyk@amu.edu.pl

-||- . faculty.wmi.amu.edu.pl

→ 3 lub więcej nieuspraw. nieobecności

- KOLOKWIA ($25 \times 2 = 50$ pkt) } 70 pkt
- AKTYWNOŚĆ (20 pkt)

* „Cracking the Cooding Interview" McDowell

* „ ~~Network~~ Neural networks and deep learning" Nielsen

10|10

zad. 1

~ Funkcja $X \to Y$ (Przyporządkowanie, które każdemu elem. zb X przypisuje dokładnie jeden element X zb Y)

a) odp. $x \in \langle 1; 2) \cup (2; +\infty)$

b) $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$

$\log_a b = c$

$a^c = b$

$\frac{x}{x+1} > 0 \qquad x+1 \neq 0$

$x(x+1) > 0 \Leftrightarrow \qquad x \neq -1$

$x > 0 \wedge x+1 > 0$

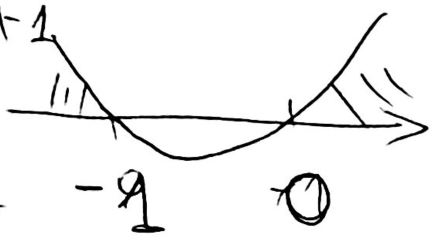
$x > 0 \wedge x > -1$

$0 \quad -1$

$\cancel{x^2 + x > 0}$

$\cancel{\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = \sqrt{1}}$

$\cancel{x_1 = \frac{1 \pm 1}{2}}$



$-1 \qquad 0$

$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

10|10

Zajęcia nr 1

Program zajęć: *przypomnienie definicji funkcji, wyznaczanie dziedziny funkcji i jej zbioru wartości, składanie funkcji, monotoniczność funkcji, funkcja odwrotna*

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę poniższych funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 5x - 6}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^x - \frac{1}{2}}}$

Zadanie 2. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^x + \frac{1}{2}}}$!

√**Zadanie 3.** Niech

a) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x + 3$

b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{x+2}$

Wyznacz

1. $f \circ f$
2. $g \circ g$
3. $f \circ g$
4. $g \circ f$

√**Zadanie 4.** Wyznacz $g \circ f$, gdzie:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x-1, & x \geqslant 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^4, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

√**Zadanie 5.** Przedstaw poniższe funkcje jako złożenie funkcji "prostszych":

a) $h(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2+5)}$

b) $h(x) = e^{14x + \sin x}$

c) $h(x) = (1 + x^2)^{10}$

d) $h(x) = \sin\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+1}}\right)$

√**Zadanie 6.** Zbadaj monotoniczność następujących funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2-1}}$!

Zadanie 7. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = 2^{x^3+1}$. Uzasadnij, że jest ona różnowartościowa, wyznacz jej zbiór wartości i wzór funkcji do niej odwrotnej.

ZESTAW 1

ANALIZA MAT.

zad. 1

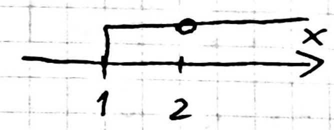
a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4x+4} + \sqrt{x-1}$

$x^2-4x+4 \neq 0 \quad \wedge \quad x-1 \geq 0$

$(x-2)^2 \neq 0 \qquad x \geq 1$

$\downarrow$

$x \neq 2 \qquad x \geq 1$



$x \in \langle 1;2) \cup (2;+\infty)$

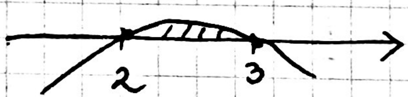
b) $f(x) = \sqrt[4]{-x^2+5x-6}$

$-x^2+5x-6 \geq 0$

$\Delta = 25-4\cdot(-1)\cdot(-6)$

$\Delta = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 1}{-2}$ — 2, 3



$x \in \langle 2;3 \rangle$

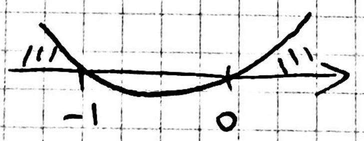
c) $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$

$\dfrac{x}{x+1} > 0$

$x(x+1) > 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad -1$



$x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x - \frac{1}{2}}}$

$2^x - \frac{1}{2} > 0$

$2^x > \frac{1}{2}$

$2^x > 2^{-1} \Leftrightarrow x > -1$

<u>zad. 2</u>

a) $f(x) = \sqrt{-x^2-5x-6}$

$y = \sqrt{-x^2-5x-6} \quad |^2$

$y^2 = -x^2-5x-6$

$y^2+6 = -x(+x+5)$

$-y^2-6 = x(x+5)$

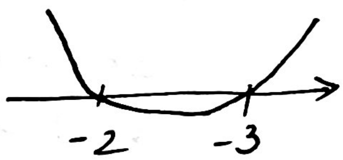
$y = 0 \Leftrightarrow -x^2-5x-6=0$

$x^2+5x+6=0$

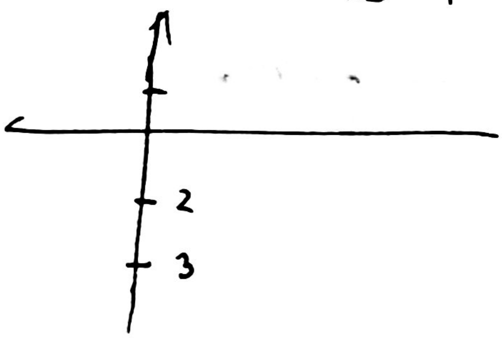
$\Delta = 25-4\cdot1\cdot6 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$

$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$ ⟨ -2, -3



?



$f'(x) = (\sqrt{a})' = \frac{(a)'}{2\sqrt{a}}$

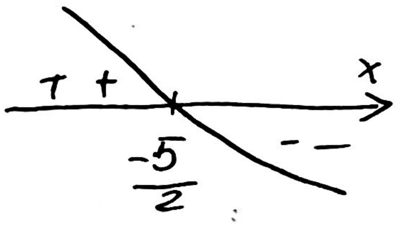
$f(x) = \sqrt{-x^2-5x-6}$

$f'(x) = \frac{-2x-5}{2\sqrt{-x^2-5x-6}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x-5=0$

$-2x = 5$

$x = -\frac{5}{2}$



	$(-\infty; -\frac{5}{2})$	$-\frac{5}{2}$	$(-\frac{5}{2}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	min	→

~~$(-\infty, -\frac{5}{2}) \Rightarrow$~~

$D_f: (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; +\infty)$

$f(-\frac{5}{2}) = \sqrt{-\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + \frac{30}{2}} = \sqrt{\frac{85}{4}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^x + \frac{1}{2}}}$

$x \in \mathbb{R}$

$y > 0$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{2^x + \frac{1}{2}}} \Big|^2$

$\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2} > 0$

$y^2 = \dfrac{1}{2^x + \frac{1}{2}} \Big| \cdot 2^x + \frac{1}{2}$

$y^2 (2^x + \frac{1}{2}) = 1 \Big| : y^2$

$\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2} > 0$

$2^x + \frac{1}{2} = \dfrac{1}{y^2}$

$\dfrac{1}{y^2} \cancel{x} > \dfrac{1}{2}$

$\underset{\text{dodatnie}}{2^x} = \underbrace{\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2}}_{\text{dodatnie}}$

$y^2 < 2$

$y^2 - 2 < 0$

$\Downarrow$

$y \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$y \in (0; \sqrt{2})$

Każdy y z przedziału $(0; \sqrt{2})$ możemy osiągnąć ?

$2^x = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2} \Big| \cdot \log_2$

$\log_2 2^x = \log_2 \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2} \right)$

$x = \log_2 \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2} \right)$

4

$$f(x) = \begin{cases} x+1 ; & x<0 \\ x-1 ; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 ; & x<0 \\ x^4 ; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(x+1) ; & x<0 \\ g(x-1) , & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^2 , & x<-1 \\ (x+1)^4 , & x \in (-1, 0) \\ (x-1)^2 , & x \in \langle 0, 1) \\ (x-1)^4 , & x \in \langle 1 ; +\infty) \end{cases}$$

5

a) $h(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2+5)}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt[3]{x} \\ g(x) = \ln x \\ z(x) = x^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(z(x)))$$

6

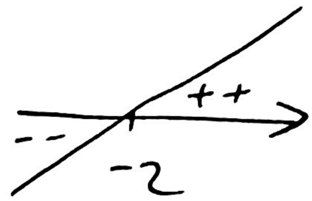
$f(x) = x^2 + 4x - 3$ $\qquad$ $\underline{x \in \mathbb{R}}$

$f'(x) = 2x+4$

a) $f'(x) = 0 \iff 2(x+2) = 0$

$\downarrow$

$x = -2$ edg



	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\underline{min}$	$\nearrow$

$f(-2) = f_{min} = 4-8-3 = -7$

$f_{\cancel{ros}} \iff f : x \in (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$

f mal $\iff$ $\swarrow$ $\qquad$ f ros $\iff$ $\searrow$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2-1}}$

D_f : $\dfrac{1}{x^2-1} \geq 0$

$x^2 - 1 > 0$

$(x+1)(x-1) > 0$

$\Downarrow$

$x \in (-\infty ; -1) \cup (+1 ; +\infty)$

$f'(x) = -\dfrac{2x}{3(x^2-1)^{4/3}} = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\cancel{x=0}$

~~$f(0) = -1 \Rightarrow f. \min$~~

$-2x\left(3(x^2-1)\right) = 0$

$\downarrow$ 0 $\quad\quad$ $\downarrow$ $-1, 1$

	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$0,1$	1	$1+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

7. $f(x) = 2^{x^3+1} = y \iff \log_a b = c \quad a^c = b$

$\log_2(y) = \cancel{2}\, x^3+1 \Rightarrow ZW\ \underline{y>0}$

~~DWA~~

Różnowartościowość

$f(x_1) \neq f(x_2) \iff x_1 \neq x_2$

$2^{a^3+1} = 2^{b^3+1}$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{a=b}}$ cnd.

Funkcja odwrotna

~~$f^{-1}(y) = 2^{y^3+1} \to x$~~

$\boxed{y = 2^{x^3+1} \,/\cdot \frac{1}{x^3+1}} \Rightarrow 2^3 \,/\cdot \frac{1}{3}$

$y^{-(x^3+1)} = 2$

$\boxed{\log_{(x^3+1)} 2 = y}$

$a, b > 0$

$2 > 0$ P

$(x^3+1) > 0$

$x^3+1 < 0$

$x^3 < -1$

$\underline{\underline{x < -1}}$

$2^3 = x$

$2 = x^{\frac{1}{3}}$

$2^{x^3+1} = y \quad / \cdot \log_2$

$\log_2 2^{x^3+1} = \log_2 y$

$x^3+1 = \log_2 y$

$\log_2 y = x^3+1$

$\{2^{x^3+1} = y\}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2-1}}$

D_f $\quad x^2 - 1 \neq 0$ $\qquad\qquad D \in R \setminus \{-1; +1\}$

$x^2 \neq 1$

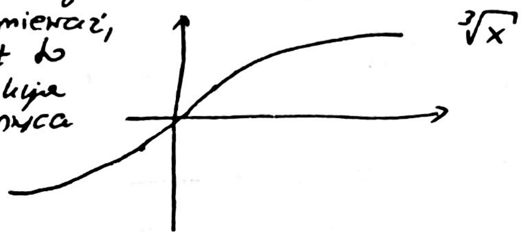
$x \neq 1 \quad \wedge \quad x \neq -1$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ funkcja jest parzyste

Hipoteza 1
funkcja jest malejąca, w „+" połowie $(0; +\infty) \setminus \{1\} \Rightarrow \underline{\underline{(0; 1) \cup (1; +\infty)}}$

Weźmy x i y $\in (0; +\infty) \setminus \{1\}$, załóżmy, że $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

$\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-1}} > \sqrt[3]{\frac{1}{y^2-1}}$ $\Big|^3 \Rightarrow$ ponieważ, jest to funkcja rosnąca



$\Updownarrow$

$\frac{1}{x^2-1} > \frac{1}{y^2-1}$

Hipoteza 2

a) W przedziale $x \in (1; +\infty)$ f ~~(x)~~ jest malejąca

Weźmy x i y $\in (1; +\infty)$, załóżmy, że $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

$\frac{1}{x^2-1} > \frac{1}{y^2-1}$

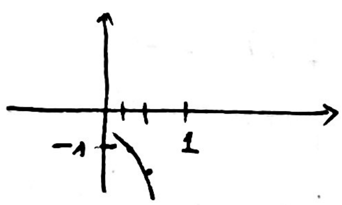
$y^2 - 1 > x^2 - 1$

$y^2 > x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$|y| > |x| \Rightarrow$ ale chciałamy „+"

$y > x$

Z dowolności wyboru x, y udowodniliśmy, że a) jest prawdziwa, z parzystości funkcji wiemy, że dla $x \in (-\infty; -1)$ funkcja jest rosnąca



Spr

$f(\frac{1}{4}) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{16}-1}} = \sqrt[3]{-\frac{16}{15}}$

$f(\frac{1}{2}) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{4}-1}} = \sqrt[3]{-\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow$ f. jest malejąca w przedziale od $(0; 1)$

$A \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$

→ funkcja f jest rosnąca, o ile: $\forall_{x,y \in A} \; x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

→ funkcja jest malejąca, o ile: $\forall_{x,y \in A} \; x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$

→ funkcja jest niemalejąca, o ile $\forall_{x,y \in A} \; x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$

→ funkcja jest nierosnąca, o ile $\forall_{x,y \in A} \; x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)$

---

b) Weźmy $x,y \in (0,1)$. Załóżmy, że $x<y$

Chcemy pokazać, że $f(x)>f(y)$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-1}} > \sqrt[3]{\frac{1}{y^2-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x^2-1} > \frac{1}{y^2-1}$$

wartości np „-" ale, że dwa razy to robimy znak nierówności się nie zmieni.

Udowodniliśmy się w przedziale od $(0,1)$ f. jest ~~rosnąca~~ malejąca

z parzystości $(-1,0) \to f$ rosnąca

$x \to 1^-$ $f(x) \to -\infty$

$x \to 1^+$ $f(x) \to +\infty$

Nie jest malejąca dla całości

f jest malejąca na zbiorze $(0;\infty)\setminus\{1\}$

f jest rosnąca na zbiorze ~~$(-\infty,0)$~~ $(-1,0)$ $(-\infty,0)$

Zad. 7

$f: X \to Y$

* f jest różnowartościowa / iniekcją o ile $\forall_{x,y \in X}$ $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
* f jest funkcją „na", o ile ZW jest równy przeciwdziedzinie
  tzn. $f(x) = Y$
* f jest bijekcją o ile jest różnowartościowa i „na"

STW
Funkcja f jest bijekcją $\Leftrightarrow$ gdy jest odwracalna, tzn. f ma funkcję odwrotną, czyli istnieje $g: Y \to X$ tzn, że $f \circ g = id_Y$
$g \circ f = id_X$

$g, f: \langle 0; +\infty) \to \langle 0; +\infty)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = \sqrt{x}$
$f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$

$\sqrt{x^2} = x$
$(\sqrt{x})^2 = x$

$2^{x^3+1} = y \Rightarrow$ znaleźć „x" aby dowiedzieć się o ZW i wzór f. odwrotnej.

(1) $\forall_{a \in A}\ a \leq M$ (1) $\forall_{a \in A}\ a \geq M$ 17/10

(2) $\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{a \in A}\ a > M - \varepsilon$ (2) $\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{a \in A}\ a < M + \varepsilon$ 24/10

sup (gór.) inf (dolny)

Zajęcia nr 2

Program zajęć: *zbiory ograniczone z dołu (z góry), kres dolny i kres górny, definicja ciągu, monotoniczność i ograniczoność ciągu*

Zadanie 1. Zbadaj ograniczoność i wyznacz kresy zbiorów:

✓ a) $A = \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ✓ b) $B = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$

✓ c) $C = \left\{\frac{2}{m} + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$ d) $D = \left\{\frac{2}{m} - \frac{3}{n} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

e) $E = \left\{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 3}\right\}$ f) $E = \{0.1,\ 0.11,\ 0.111, \ldots\}$

Zadanie 2. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami ograniczonymi. Pokaż, że:

a) $\inf(A) \leqslant \sup(A)$

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ bez zmniejszania ogólności uważamy $\sup A \leqslant \sup B$.

c) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Zadanie 3. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi. Pokaż, że

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Podaj przykład funkcji f i g dla których powyższa nierównośc jest ostra.

Zadanie 4. Znając kilka początkowych wyrazów ciągu wyznacz jego wzór ogólny.

✓ a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ ✓ b) $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$

c) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ d) $0.7, 0.77, 0.777, \ldots$

Zadanie 5. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) takiego, że:

a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n$

✓ b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n + 1)a_n$

c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n + 1) + a_n$

Zadanie 6. Zbadaj monotoniczność i ograniczoność poniższych ciągów:

a) $a_n = \frac{1}{2n+1}$ b) $a_n = \frac{n}{2^n}$ c) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$ e) $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

$A \subseteq \mathbb{R}$ ograniczony z góry, tzn. $\underset{M \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{a \in A}{\forall} \ a \le M$

mie jest wyznaczone jednoznacznie

$\sup A$ = najmniejsze ograniczenie górne

ANALOGIA DLA KRESU DOLNEGO

$M = \sup A$, o ile:

(1) $\underset{a \in A}{\forall} \ a \le M$ [M jest ogr. górnym A]

(2) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{a \in A}{\exists} \ a > M - \varepsilon$ [jeśli chodź troszkę pomniejszymy M to przestanie ono być ograniczeniem górnym]

PRZYKŁAD

$\sup (0,3) = 3$ 1° zachodzi 2° zachodzi

Kres górny mie musi być elementem zbioru

$\sup (0;3] = 3$

Jeśli w zbiorze jest element najw. ~~największy~~ to jest on kresem górnym.

zad. 1.

a) $A = \{ 1 + \frac{1}{n^2} ; n \in \mathbb{N} \}$

$n = 1$ $2 \Longrightarrow \sup(A) = 2$, jest elementem największym

$n = 2$ $1,25$

$n = 3$ $1 + \frac{1}{9}$ $\inf(A) = 1$

Hipoteza $\inf A = 1$

(1) $\underset{a \in A}{\forall} \ a \ge 1$

$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \ 1 + \frac{1}{n^2} \ge 1$

(2) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{a \in A}{\exists} \ a < 1 + \varepsilon$

$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} \ 1 + \frac{1}{n^2} < 1 + \varepsilon$

$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n$

podłoga

$n = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$

b) $B = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$

Zbiór B nie jest ograniczony z góry wobec tego nie ma kresu górnego

CHCEMY POKAZAĆ:
$\inf B = 0$

1) $\forall_{b \in B} \; b \geq 0$

$\Updownarrow$

$\forall_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^n \geq 0$ OK

2) $\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{b \in B} \; b < M + \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^n < M + \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^n < 0 + \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{n \in \mathbb{Z}} \; 2^n < \varepsilon$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Szukamy n, które musi zależeć od ε $\{n = n(\varepsilon) \in \mathbb{Z}\}$ takiego, że $2^n < \varepsilon$

$2^n < \varepsilon \; \big| \cdot \log_2$

$\log_2 2^n < \log_2 \varepsilon$

$n < \log_2 \varepsilon \Leftarrow$ Musimy konkretnie wskazać; aby na pewno upewnić się

$\underline{\underline{n := \lfloor \log_2 \varepsilon \rfloor - 1}} \Leftarrow$ Jak odejmniemy $\log_2 \varepsilon \in \mathbb{Z}$ więc jak odejmniemy 1 też zostaje w liczbach $\mathbb{Z}$.

~~Rozwiązujemy w R~~

Udowodnimy że ~~kres~~ zbiór b nie jest ograniczony z góry. (przez negację)

$\exists_{m \in R} \; \forall_{b \in B} \; b \leq m$

$\neg (\quad - \| - \quad) \Leftrightarrow \forall_{m \in R} \; \exists_{b \in B} \; b > m$

$\forall_{m \in R} \; \exists_{m \in \mathbb{Z}} \; b > m$

Ustalmy $m \in \mathbb{R}$. Szukamy $n = n(m)$, takiego, że $2^n > m$

1° Niech $m \leq 0$ Bo $\frac{\text{nie}}{\log.}$ można

$n=0$, $n=1$

$\boxed{2^n > m}$ => wyjściowa nierówność

Jest zawsze prawdą dla $m \leq 0$

$n \in \mathbb{N}$ => jest nosami "gromiony", połowię konkretnie

2° ~~$n>0$~~ Niech $m > 0$

$\log_2 2^n > \log_2 m$

$n > \log_2 m$

$n = \lfloor \log_2 m \rfloor + 1 \implies$ szukane n

c) $C = \{\frac{2}{m} + \frac{1}{n};\ n, m \in \mathbb{N}\}$

$\inf C = 0$

$\sup C = 3$; 3 jest elementem największym w zbiorze C zatem jest kresem górnym.

CHCEMY POKAZAĆ

$\inf C = 0$

1) $\forall_{c \in C}\ c \geq M$

$\forall_{n,m \in \mathbb{N}}\ \frac{2}{m} + \frac{1}{n} \geq M(0)$

$\frac{2}{m} + \frac{1}{n} \geq 0$

OK

$\left.\begin{array}{l} \forall_{m \in \mathbb{N}}\ \frac{2}{m} \geq 0 \\ \forall_{n \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{n} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall_{m,n \in \mathbb{N}}\ \frac{2}{m} + \frac{1}{n} \geq 0 + 0$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Szukamy $n, m \in \mathbb{N}$ zależności od ε.

2) $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{c \in C}\ c < M + \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n,m \in \mathbb{N}}\ c < 0 + \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n,m \in \mathbb{N}}\ c < \varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n,m \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{n} + \frac{2}{m} < \varepsilon$

$\Uparrow$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{n} < \frac{1}{2}\varepsilon \ \wedge\ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}}\ \frac{2}{m} < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ \frac{1}{n} < \frac{1}{2}\varepsilon \ \wedge\ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m \in \mathbb{N}}\ \frac{2}{m} < \frac{1}{2}\varepsilon$

Dlatego że suma prawych stron będzie równa "ε" a jakbyśmy mieli $\varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon$.. $\Leftarrow$

$\frac{2}{n} < \varepsilon$ $\qquad$ $\frac{4}{m} < \varepsilon$

$2\frac{1}{\varepsilon} < n$ $\qquad$ $4\frac{1}{\varepsilon} < m$

$n = \lceil 2\frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 \ \wedge\ m = \lceil 4\frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$

zad. 4

* CIĄG LICZBOWY : $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) $a_n = ?$

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)2 = 2n-1$$

b) $a_n = 2^n - 1$; $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1, & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ wzór rekurencyjny

c) $a_n =$

zad. 5

a) ~~$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$~~

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n \end{cases}$

$$a_{n+1} = a_n \cdot n + a_n$$

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{n+1}$$

$$\left.\begin{matrix} a_2 = 2 \cdot 1 \\ a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = n!$$

Dowód, że $a_n = n!$

1° PIERWSZY KROK INDUKCJI $n_0 = 1$

$1! = a_1$
$2! = 2 \cdot 1 = 2 \cdot a_1 = a_2$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot a_2 = a_3$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot a_3 = a_4$

SPRAWDŹ DLA KILKU ELEMENTÓW 8

2° ZAŁOŻENIE INDUKCYJNE

Załóżmy, że dla dowolnej lecz ustalonej liczby $n \geq 1$

Zachodzi $a_n = n!$

Pokażemy, że $a_{n+1} = (n+1)!$

3° DOWÓD IND

$$a_{n+1} = (n+1)a_n = (n+1)n! = (n+1)! \quad \square$$

ZAD. 6

* $\forall_n \; a_n < a_{n+1}$ ciąg rosnący

* ciąg jest ograniczony z góry, o ile

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \; a_n \leq M$$

zad. 6.

a) Twierdzimy, że ciąg jest malejący

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_{n+1} < a_n$, podstawiamy konkretne wartości

Pokażemy, że: $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$

$2n+3 \geqslant 2n+1 \quad | \cdot (2n+3)(2n+1)$

$\underline{3 \geqslant 1}$ $\quad 3 > 1$ prawda

$\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_n \leqslant M$

$\frac{1}{2n+1} \leqslant 1 \ | \cdot 2n+1 \qquad \underline{n \geqslant 1}$

$1 \leqslant 2n+1$

$0 \leqslant 2n$

$0 \leqslant n$ prawda; ciąg jest ograniczony z góry przez 1.

$\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_n \geqslant M$

$\frac{1}{2n+1} \geqslant 0$

$1 \geqslant 0$ prawda; ciąg jest ograniczony z dołu przez 0.

b) Twierdzimy, że ciąg jest rosnący

$a_n < a_{n+1}$

Pokażemy, że: $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ ~~$a_n \geqslant a_{n+1}$~~

~~$\sqrt{2} < \sqrt{}$~~

~~$\sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+a_{n+1}} \ |^2$~~

~~$2+a_n < 2+a_{n+1}$~~

~~$a_n < a_{n+1}$~~ tak $n \geqslant 1$.

*

$a_n < \sqrt{2+a_{n+1}}$

$a_n < a_{n+1}$

$a_n < \sqrt{2+a_n} \ |^2$

$a_n^2 < 2+a_n$

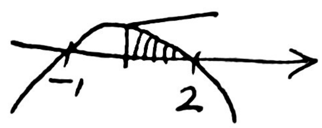
$0 < 2+a_n-a_n^2$

$0 < -a_n^2+a_n+2$

$\Delta = 1-4\cdot(-1)\cdot 2$

$\Delta = 1+8 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$a_{n1,2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$ ⟨ -1, 2



Tak długo jak $a_n \in (0;2)$ ciąg jest rosnący

$a_{n+1} > -1$

$a_{n+1} > \sqrt{2}$ • $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ $a_n > 0$, pierwiastek jest funkcją

$\sqrt{2+a_n} > \sqrt{2}$ rosnącą wobec tego OK.

$\cancel{\sqrt{a_{n+1}} < 2}$

$\cancel{\sqrt{2+a_{n+1}} < 2}$

$\cancel{\sqrt{2+a_{n+1}} < 2} \Longrightarrow$

$\cancel{2+a_{n+1} > 0}$ $(\cdot)$

$a_{n+1} > 0$

---

e) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_n = \sqrt{2+a_n} \end{cases}$

Twierdzimy, że c. rosnący

$a_n < a_{n+1}$

$a_n < \sqrt{2+a_n}$

$(a_n)^2 < 2+a_n$

$a_n^2 - a_n - 2 < 0$

$a_{n_{1,2}} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

Możemy też zrobić indukcją

zał.? $a_n < a_{n+1}$

$a_{n+1} < a_{n+2}$

$a_n + 2 \leq a_{n+1} + 2$

$\sqrt{a_n + 2} < \sqrt{a_{n+1} + 2}$

$a_{n+1} < a_{n+2}$. $\square$

$a_n \in (-1, 2) \Rightarrow$ Tak, długo $a_n \in (-1, 2)$ ciąg jest rosnący

$a_n > -1$?

$a_{n+1} > \sqrt{2},\ n \geq 1$

$\sqrt{2+a_n} > \sqrt{2} \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}}$ $2 + a_n > 0$

$\Uparrow$

$a_n > 0$.

$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; a_n > -1$

$a_{n+1} < 2 \;;\; n \geq 1$

$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; a_n < 2$

$\sqrt{2 + a_n} < 2$

INDUKCJA

1° $a_1 = \sqrt{2} < 2$

$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$ szacując $\sqrt{2+2} = 4 < 2$.

$\sqrt{2} < 2$

2° Założenie indukcyjne $a_n < 2$

$a_{n+1} < 2$

$2 + a_n < 2 + 2$

$2 + a_n < 4$

$\sqrt{2 + a_n} < 2$

$\underline{a_{n+1} < 2}$ $\square$

Pokazaliśmy, że

$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; a_n \in (-1, 2)$

1° ciąg jest ograniczony (z góry 2, z dołu $\sqrt{2}$)

2° ma mocy wcześniejszych rozważań, on jest rosnący

5.12 => KOLOKWIUM !

7/11

Zajęcia nr 3

Program zajęć: *definicja granicy ciągu i definicja ciągu Cauchy'ego, podstawowe własności granic i proste techniki obliczania granic*

Zadanie 1. Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnij podane równości:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+5} = 0$$

Zadanie 2. Uzasadnij, że poniższe ciągi nie są zbieżne:

a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = \frac{4n^2+1}{2n+3}$

Zadanie 3. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ b) $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ c) $a_n = \frac{17}{\sqrt{n+2}}$

d) $a_n = \frac{n^2+3n+1}{4n^2+2}$ e) $a_n = \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ f) $a_n = \frac{(2n+1)^2}{-3n^2+3}$

Zadanie 4. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = \frac{2^n+3^n}{3^n+1}$ b) $a_n = \frac{25^n+3^n}{5^{2n+1}+4^n}$ c) $a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+1}$

Normalnie wyciągamy
nie stosujemy
o 3. ciągach

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} = 1$

Zadanie 5. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n})$ b) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}}{2n+3}$

c) $a_n = \frac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^n+1}$ d) $a_n = \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n}$

Zadanie 6. Uzasadnij, że ciąg dany rekurencyjnie:

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny i wyznacz jego granicę.

Zadanie 7. (Algorytm przybliżania pierwiastka z danej liczby)
Niech $S > 0$ i niech ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zdefiniowany następująco:

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{S}{a_n}\right) \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywista większą niż $\sqrt{S}$. Uzasadnij, że ciąg ten jest zbieżny i jego granica wynosi $\sqrt{S}$.

Def. Granicy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \ \forall_{n>n_0} \ |a_n - a| < \varepsilon$$

dla prawie wszystkich n ≡ dla wszystkich n poza ich skończoną liczbą ≡ $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0}$ [ ]

zad. 1

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \ \forall_{n>n_0} \ \left|\frac{3-n}{n+4} + 1\right| < \varepsilon$$

Ustalmy $\varepsilon>0$. Szukamy $n_0 \in \mathbb{N}$ takiego, że

$$\forall_{n>n_0} \ \left|\frac{3-n}{n+4} + 1\right| < \varepsilon$$

~~$n+4<0$~~

$$\left|\frac{3 \cancel{-n} + \cancel{n}+4}{n+4}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{7}{n+4}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{7}{n+4} < \varepsilon \quad | \cdot (n+4)$$

$$7 < \varepsilon(n+4)$$

$$7 < \varepsilon n + 4\varepsilon$$

$$\frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon} < n.$$

$$\overline{n_0} := \left\lfloor \frac{7-4\varepsilon}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

$$\boxed{n_0 := \max\{\overline{n_0}, 1\}}$$

zad. 2

$f(n): \mathbb{N} \to \mathbb{Q}/\mathbb{R}$ ciąg

Jeśli ciąg jest zbieżny, to

(1) jest ograniczony

(2) każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy

a)

$b_n = (-1)^{2n} = a_{2n}$

$c_n = (-1)^{2n+1}$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

$\lim_{n\to\infty} b_n \neq \lim_{n\to\infty} c_n \Rightarrow$ ciąg nie jest zbieżny

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4+\frac{1}{n^2})}{n^2(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{2}}(\underbrace{4+\frac{1}{n^2}}_{4})}{\cancel{n}(\underbrace{2+\frac{3}{n}}_{2})} = +\infty$

$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n < M$

Ciąg jest rozbieżny ~~aż~~ do $+\infty$.

Praca domowa

zad. 3

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{2}{n})} = 1$

$1-\frac{1}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})}$

$\boxed{\begin{matrix}3e\\4b\\5cd\end{matrix}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k(1+\frac{1}{k})}\right) = 0$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = (1-\frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{1}{3} \cdot (1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{17}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{17\sqrt{n+2}}{n+2} = 0$

$\frac{17\sqrt{n-2}}{\sqrt{n^2-4}} = \frac{17\sqrt{n-2}}{\sqrt{n^2(1-\frac{4}{n^2})}} = \frac{17\sqrt{n-2}}{n\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}} \to 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{4n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(4+\frac{2}{n})} = \frac{1}{4}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(n+2)+(n+1)!}{(n+2)\,(n+1)!\,(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{-3n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{-3n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(-3+\frac{3}{n^2})} =$

$= -\frac{4}{3}$

b) 1° $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ } Wygląda na to, że 2° $a_n = \frac{1}{n+1}$

3° $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

$a_{n+1} \overset{z.def}{=} a_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \overset{z.ind}{=} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{n+2} = \frac{1}{n+2}$ end

zad. 4

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+1} \overset{*}{=} ?$

$\frac{2^n+2^n}{3^n+3^n} \leq \frac{2^n+3^n}{3^n+1} \leq \frac{2^n+3^n}{3^n}$

$\frac{2^n(1+1)}{3^n(1+1)} \leq$ -||- $\leq \frac{2^n}{3^n}+1$

$0 \leq$ -||- ≤ 0 $\Longrightarrow \overset{*}{=} 0.$

zad

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+1} \overset{*}{=} ?$

$$\frac{2^n+2^n}{4^n+4^n} \leq \frac{2^n+3^n}{4^n+1} \leq \frac{2^n+2^n}{4^n}$$

$$\frac{2^n(1+1)}{4^n(1+1)} \leq -||- \leq \frac{2^n(1+1)}{4^n}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq -||- \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n+1$$

$$0 \leq -n- \leq 0 \Rightarrow$$ zasada o trzech ciągach $\overset{*}{=} 0$

zad. 5

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\cancel{n^2}+4n+1-(\cancel{n^2}+2n))}{\sqrt{n^2(1+\underbrace{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}_{0})}+\sqrt{n^2(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{0})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(1+\frac{1}{2n})}{2n} =$$

$= 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}\sqrt{n^2-2n}}{2n+3\sqrt{n^2(1-\underbrace{\frac{2}{n}}_{0})}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4-4n^2}}{(2n+3)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4(1-\frac{4}{n^2})}}{2n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\sqrt{1-\underbrace{\frac{4}{n^2}}_{0}}}{\cancel{n^2}(2+\underbrace{\frac{3}{n}}_{0})} =$$

$= \frac{1}{2}$

nr. 1

$\boxed{\text{KOLOKWIUM} \Rightarrow 5.12\,!}$

4 zad.

a)

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n+1} = \frac{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{\cancel{3^n}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0} + 1}{1+\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

b) $$a_n = \frac{25^n + 3^n}{5^{2n+1}+4^n} = \frac{25^n + 3^n}{25^{n}\cdot 5 + 4^n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{25^n}\left(1+\overbrace{\left(\frac{3}{25}\right)^n}^{\to 0}\right)}{\cancel{25^n}\left(5+\underbrace{\left(\frac{4}{25}\right)^n}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{5}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{4^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0} \frac{\left(\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0}+1\right)}{\left(1+\underbrace{\frac{1}{4^n}}_{\to 0}\right)} = 0$$

zad. 5

d) $$\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2+4+\ldots+2n} =$$

$1+2+\ldots+n \qquad \frac{n(n+1)}{2}$

$n\ (n-1)\ \ldots +2+1$

$$= \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{(1+1)+(3+1)+\ldots+(2n-1)+1} =$$

$$= \frac{b_n = 1+3+\ldots+2n-1}{1+3+\ldots+2n-1+n} =$$

$$= \frac{b_n}{b_n+n} = \frac{\cancel{b_n}}{\cancel{b_n}\left(1+\frac{n}{b_n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \frac{1}{1+\frac{n}{1+3+\ldots+2n-1}} = 1$$

zad. 6

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$

$a_1 = \sqrt{2}$

TW. Jeśli ciąg jest ograniczony i monotoniczny jest zbieżny.

Na mocy rozważań z poprzednich zajęć wiemy, że ciąg a_n jest zbieżny

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n}$$

$$a = \sqrt{2+a} \quad |^2$$

$$a^2 = 2+a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1+8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \notin \end{cases}$$

ponieważ pierwszy wraz ciągu jest dodatni oraz cały ciąg jest rosnące

14/11

Zajęcia nr 4

Program zajęć: *zastosowanie twierdzenia o trzech ciągach, liczba e, punkty skupienia ciągów*

Zadanie 1. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

b) $a_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$

c) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$

d) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$ $\Rightarrow$ szereg wrócimy

e) $a_n = \frac{(0,9)^n}{n+1}$

f) $a_n = \frac{n}{n^2+1} \sin\left(\frac{13n!}{4\ln(n+3)}\right)$

Zadanie 2. Oblicz granice następujących ciągów:

a) $a_n = (1 + \frac{2}{n})^n$

b) $a_n = (1 - \frac{4}{n})^{3n}$

c) $a_n = (\frac{3n+1}{3n+2})^{6n}$

d) $a_n = (\frac{n^2-1}{n^2})^{2n^2-3}$

Zadanie 3. Pokaż, że ciąg określony następująco: $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin i}{2^i}$ jest zbieżny.

Zadanie 4. Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach niezerowych takim, że

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1.$$

Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Zadanie 5. Uzasadnij, że podane ciągi są zbieżne do zera:

a) $a_n = \frac{100^n}{n!}$

b) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Zadanie 6. Znajdź punkty skupienia, granicę dolna i górną następujących ciągów:

! bez kolokwium na kolokwium

a) $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = 1 + 3(-1)^{n+1} + 4(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$

d) $a_n = \frac{n^2}{2n^2+1} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2})$

Zadanie 7. Pokaż, że ciąg $\{\sin n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny.

zad 1 a) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

14 | 11

$$\sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{4^n+4^n+4^n}$$

$\sqrt[n]{4^n} \xrightarrow{n\to\infty} 4$, $\sqrt[n]{4^n+4^n+4^n} \xrightarrow{n\to\infty} 4$, $\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$ — $n\to\infty$ z tw. o 3 ciągach — 4

$\sin 2 = 0{,}9$
$\sin 3 = 0{,}14$
$\sin 4 = -0{,}75$ $\Big\}$ $\sin n \in \langle -1, 1\rangle$.

b) $a_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$; $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{3-1} \leq \sqrt[n]{3+\sin n} \leq \sqrt[n]{3+1}$$

$$\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{3+\sin n} \leq \sqrt[n]{4}$$

$\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\sqrt[n]{4} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

z tw. o 3 ciągach

1

Twierdzenie o trzech ciągach

Niech dane będą ciągi a_n, b_n, c_n takie, że : $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla prawie wszystkich n

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$ => $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$

c) $$a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}} = \cancel{\sqrt[n]{2^n+2^n+4}} \quad \sqrt[n]{\frac{3^n(1+\frac{2^n}{3^n})}{5^n(1+\frac{4^n}{5^n})}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{1+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{4^n}{5^n}}} = \frac{3}{5}$$

$\frac{2^n}{3^n} \to 0$, $\frac{4^n}{5^n} \to 0$

d) $$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \; ?$$

Szereg będzie rozwiązany później

~~a_n~~ $\mathfrak{I}$ ‡

e) $$a_n = \frac{(0{,}9)^n}{n+1} = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^n}{n+1} = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0.$$

$\left(\frac{9}{10}\right)^n \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$, $1+\frac{1}{n} \to 1$

zad. 2

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3n} \overset{*}{=} e^{-12}$

$$\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3n} = \left(1-\frac{12}{3n}\right)^{3n} = \left(\frac{3n}{3n}-\frac{12}{3n}\right)^{3n} = \cancel{\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right.\right.}$$

$$= \left(\frac{3n-12}{3n}\right)^{3n} = \left[\left(\frac{3n-12+12}{3n-12}\right)^{3n}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n-12}{12}}\right)^{\frac{3n-12}{12}}\right)^{12}\right]^{-1} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{3n-12}{12}}\right)^{12} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-12}$$

$$\left(1+\frac{1}{\frac{3n-12}{12}}\right)^{12} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

zawsze do dodawania!

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n} \Rightarrow$

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n} = \left[\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{6n}\right]^{-1} = \left[\left(\frac{3n+1+1}{3n+1}\right)^{6n}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{6n}\right]^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1\cdot\frac{6n}{3n+1}}\right]^{-1} =$$

$$\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{6n}{3n+1}} = e^{-\frac{\cancel{n}\cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{n}(\cancel{3}+\frac{1}{n})}} = e^{-2}}$$

d) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2-3} = \left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{2n^2-3} =$

$$\boxed{= \left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2\cdot\frac{2n^2-3}{-n^2}} = \left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2\cdot\frac{\cancel{n^2}(2-\frac{3}{n^2})}{-\cancel{n^2}}} = e^{-2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+x}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+2}{n-2}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^{\cancel{\frac{-2n}{n-2}}\,\cdot\,\frac{n-2}{2}}\right]}_{e}^{\frac{-2n}{n-2}} =$$

$$\frac{n-2}{2}\cdot x = -n \;\Big|\cdot 2$$

$$e^{\frac{-2n}{n-2}} =$$

$$(n-2)\cdot x = -2n$$

$$\cancel{nx-2x} =$$

$$x = \frac{-2n}{n-2}$$

$$\Rightarrow \cancel{\lim_{n\to}}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n-2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)}\right)} = e^{-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{\frac{-2n}{n-2}} \cdot \cancel{\lim_{n\to\infty}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n-\cancel{2}}$$

zad. 5

Asymptotyczne ~~tępo~~ tempo wzrostu

$f(n)$ jest $o(g(n))$ "o małe od g"

f jest niższego rzędu od g o ile dla każdej stałej $c>0$ istnieje liczba naturalna n_0 t. że

$$\forall_{n \geq n_0} \quad f(n) < c \cdot g(n)$$

$$\Longleftarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$f(n)$ jest $O(g(n))$ "O duże od g"

f jest co najwyżej g, o ile istnieje stała $c>0$ oraz liczba naturalna n_0 taka, że

$$\forall_{n \geq n_0} \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$\Longleftarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < +\infty$$

(jest skończona)

zad. 6.

$$A = \{ a \in \mathbb{R} \mid \text{istnieje podciąg } a_{n_k} \text{ ciągu } a_n \text{ t, że } \lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a \}$$

$\uparrow$

zbiór punktów skupienia ciągu a_n

UWAGA

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$, to $A = \{a\}$, ponieważ każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy

Jeśli A - ograniczony, to

$\limsup_{n \to \infty} a_n := \sup A$ — gr. górna ciągu A

$\liminf_{n \to \infty} a_n := \inf A$ — " dolna "

(a) $a_n = (-1)^n$, $A = \{-1; 1\}$

$\{-1, 1\} \subseteq A$

$-1 \in A$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$

ZBIORY PUNKTÓW SKUPIENIA

DLA POZOSTAŁYCH PUNKTÓW. ∇ $\emptyset$

b) $a_n = 1 + 3(-1)^{n+1} + 4(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$a_1 = 1 + 3 + 4(-1)^{\frac{1(\cancel{1-1})}{2}} = 1+3+4 = 8$

$a_2 = 1 + 3(-1)^3 + 4(-1)^1 = 1-3-4 = 1-7 = -6$

$a_3 = 1 + 3 + -4\left((-1)^{\frac{3(2)}{2}}\right)^3 = 1+3-4 = 0$

$a_4 = 2$

$a_5 = 8$

$\max \Rightarrow 8$ $\min = 6$

Zrobione samemu

c) $a_1 = -0.5$

$a_2 = 0{,}666$

$a_3 = -0{,}75$

$a_4 = 0{,}8$

c) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \to 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = 1$

$\{-1; 1\} \in A \Rightarrow$ punkty skupienia.

d)

$A \in \langle -1; 1 \rangle$

28 | 11

Zajęcia nr 5

Program zajęć: *definicja szeregu nieskończonego, szereg geometryczny, warunek konieczny zbieżności szeregu, kryterium porównawcze*

Zadanie 1. Rozpatrując ciąg sum częściowych zbadaj zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

kryterium zagęszczania

Zadanie 2. Pokaż, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i każdego $x \neq 1$ mamy

$\forall_{m \in \mathbb{N}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}} \ x \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{m} x^n = x\frac{1-x^m}{1-x}.$$

INDUKCJA

Wywnioskuj stąd, że dla $|x| < 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)}.$$

Zadanie 3. Pokaż, że

$$0.(9) = 1.$$

Zadanie 4. Oblicz sumy następujących szeregów:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

c) $1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{1}{10^4} + + \frac{2}{10^5} + \frac{5}{10^6} \dots$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$

Zadanie 6. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$

SZEREGI

28/11

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ = „ciąg o wyrazach a_n"

* N-ta suma częściowa $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \dots a_N$
* szereg o wyrazach a_n nazywamy ciąg jego sum częściowych i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (S_N)_{N=1}^{\infty}$
* sumą szeregu $\sum_{n=1} a_n$ nazywamy granicę $\lim_{N\to\infty} S_N$ (o ile istnieje)

UWAGA

* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$

Sumę szeregu oznaczamy tak samo jak szereg

zad. 1

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 + (-1) \dots$

$S_1 = -1$

$S_2 = -1 + 1 = 0$

$S_3 = -1$

$S_N = \begin{cases} -1, & N \text{ jest nieparzyste} \\ 0, & N \text{ jest parzyste} \end{cases}$

$\lim S_n \neq$ lim dolny $\neq$ lim górny

$\lim_{N\to\infty} S_N$ nie istnieje, ponieważ ma dwa podciągi dążące do różnych granic. Wobec tego wyjściowy szereg nie jest zbieżny.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} + \cancel{1}\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} =$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = 1$

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} =$

$S_N = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \frac{n+1-\cancel{1}}{n+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\cancel{n}^{\,1}}{\cancel{n}\underbrace{(1+\frac{1}{n})}_{\to 1}} = 1$; jest zbieżny ?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → zbieżny gdy $|\alpha| > 1$; → rozbieżny gdy $|\alpha| \leq 1$ (*)

zad. 2

$\sum_{n=1}^{m+1} x^n = \sum_{n=1}^{m} x^n + x^{m+1}$

$\underbrace{x^1 + x^2 + \dots x^m}_{} + x^{m+1}$

jeśli $|x|<1$ to $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

Problem zad 2 → IND

musimy zrozumieć S_N, na mocy poprzedniej części zadania

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x^n = x\,\frac{1-x^N}{1-x}$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} x\,\frac{1-x^N}{1-x} = \lim_{N\to\infty} x\,\frac{1-0}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

$x^N \to 0$

ponieważ nie jest zależne od „N".

zad. 3

$0,(9) = 1 \Rightarrow \underbrace{0,9+0,09+0,009 \ldots}_{\text{c. geo.}} = 1$

~~$S_N = 1$~~

$a_1 = 0,9$
$a_2 = 0,09$ $\Rightarrow$ $a_1 = 0,9$
$q = \frac{0,09}{0,9} = 0,1$

$$S_N = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow \text{suma c. geom.}}$

$S_N = 0,9 + 0,09 + 0,09 \ldots$

$S_N = 0,9 + 0,1(0,9 + 0,09 + 0,009)$

$S_N = 0,9 + 0,1\, S_N$

$0,9 S_N = 0,9$

$S_N = 1$

zad. 5

b) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to granica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)}_{a_n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Wniosek
$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$
Wyjściowy szereg jest **rozbieżny**

Zad 6

TW. (KRYTERIUM PORÓWNAWCZE)

* Jeśli $0 \leq a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich n oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to $\sum_{n=1} a_n$ także jest zbieżny

* Jeśli $0 \leq a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich n oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\forall_x \ \sin x \leq x$

$0 \leq \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ (*)

$\frac{1}{n^2} \to$ jest zbieżny

$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\downarrow$ jest zbieżny

Przelicz wszystkie.

12 | 12

Zajęcia nr 6

Program zajęć: kryteria zbieżności szeregów ciąg dalszy, szeregi naprzemienne wraz z oszacowaniem sumy tych szeregów

Zadanie 1. Korzystając z kryterium d'Alemberta, Zbadaj zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ ✓ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$? c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$

Zadanie 2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego, zbadaj zbieżność następujących szeregów:

✓ a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+1/n)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n^2+1))^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$? f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

✓**Zadanie 3.** Korzystając z kryterium zagęszczeniowego pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$

Zadanie 4. Korzystając z kryterium Leibniza, uzasadnij zbieżność następujących szeregów:

✓ a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ ✓ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

Czy szeregi te są zbieżne bezwzględnie?

? **Zadanie 5.** Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ z dokładnością do 0.01.

Zadanie 6. Wyznacz zbiór tych $x \in \mathbb{R}$ dla których podane szeregi są zbieżne:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-2)^n$ ✓b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$? c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

$\forall_x \quad \sin x \le x$

$f(x) = x - \sin x \geq 0$

$\boxed{f'(x) = 1 - \cos x > 0}$

12/12

POŁOŁOSIE

Zaj 6

kryterium d'Almberta

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , \quad a_n \neq 0$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

* $L < 1$ szereg zbieżny
* $L > 1$ szereg rozbieżny
* $L = 1$ to kryterium nie rozstrzyga czy szereg jest zbieżny.

Przykład

* $\sum_{n=1}^{\infty} 1 \implies S_n = n$ rozbieżny

$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - zbieżny

$$L = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(1 + \underbrace{\frac{2n}{n^2}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0})} = 1$$

zad. 1

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{10^n} \cdot 10 \cdot \cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} =$$

$= 0 \Rightarrow 0 < 1$ ~~tło~~ szereg jest ~~rozb~~ zbieżny

Na mocy tw kryt. d'Alemberta $\Rightarrow$

Kryterium Catchego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad C = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

* jeśli $C<1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
* jeśli $C>1$, —II— jest rozbieżny
* jeśli $C=1$, —II— jest nie rozstrzygnięty

zad. 2

a) $\displaystyle\sum_{n+1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

* Dla ciągów zbieżnych granica górna = granica dolna = lim

$$C = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} =$$

$$\sqrt[n]{n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}_{\substack{1 \quad 1 \\ n\to\infty}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} \to 1}{\underbrace{2}_{2}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

Na mocy kryt. Cauchy'ego ten szereg jest zbieżny

$\circledast$ tylko dlatego pominęliśmy zapis $\lim\limits_{n\to\infty}$ myp – $\lim\limits_{n\to\infty}$

Kryterium Leibniza

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \ldots$$

szereg naprzemienny (alternujący)

wszystkie a_n jest^of^ dodatnie
albo wszystkich a_n jest^of^ ujemne

jeśli $|a_n|$ jest ciągiem nierosnącym oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

zad 4

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

$\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ => ciąg nierosnący (malejący)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ => na mocy kryterium Leibniza szereg jest zbieżny

DEF
Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżny, o ile

szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

UWAGA Jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
(bezwzględnie zbieżność implikuje zbieżność)

Przykład

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots = \ln 2$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\ldots = \frac{3}{2}\ln 2$$

Suma szeregu bezwzględnie zbieżnego nie zależy od kolejności sumowania wyrazów

ciąg dalszy

a) Szereg $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[= \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right|\right]$ = jest zbieżny

więc, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{\sqrt{n}}+\frac{100}{\sqrt{n}}\right)} = \left(\frac{1}{\frac{n+100}{\sqrt{n}}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \text{rozbieżny}$$

~~nieformalnie~~ ~~uzasadnić~~
zastosować kryterium porównawcze.

Wobec tego ten szereg nie jest zbieżny bezwzględnie.

zad 3

KRYTERIUM ZAGĘSZCZENIOWE

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, a_n nierosnący.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Longleftrightarrow$ gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \overset{a_{2^n}}{\frac{1}{2^{np}}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{np}} = \cancel{2^n}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np-np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-np} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{(p-1)})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow q = \frac{1}{2^{p-1}}$ Szereg geometryczny

$|q| < 1 \Rightarrow$ Szereg jest zbieżny

$$\left|\frac{1}{2^{p-1}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{1}{2^{p-1}}\right| < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 < \cancel{\left|\frac{1}{2^{p-1}}\right|} < 1 \quad \Big| \cdot 2^{p-1}$$

$$\cancel{-2^{p-1}}$$

RÓWNANIE BEZWZGLĘDNE

$$\underbrace{-1 < \frac{1}{2^{p-1}}}_{\Downarrow} \underbrace{< 1}_{*}$$

$$\forall_{p \in \mathbb{R}} \ \frac{1}{2^{p-1}} > 0$$

$$* \quad \frac{1}{2^{p-1}} < 1$$

$$1 < 2^{p-1}$$

$$2^0 < 2^{p-1}$$

$$0 < p-1$$

$$0 < p-1$$

$$1 < p$$

$$\underline{\underline{p > 1}}$$

<u>cnd.</u>

zad. 6

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+3)^n}{n!}}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(x+3)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(x+3)^n}(x+3)\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}\cancel{(x+3)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left|\frac{x+3}{n+1}\right|}_{L} = 0$$

$$|x+3| \lim \frac{1}{n+1}$$

$L < 1 \Rightarrow$ szereg jest zbieżny

$$\left|\frac{x+3}{n+1}\right| < 1$$

$n+1 \neq 0$

$-1 \quad 1$

~~4° $x \in$ $n \in$~~

3° $n \in (1; +\infty)$

$$\frac{x+3}{n+1} < 1$$

$$x+3 < n+1$$

$$x < n-2$$

odp Nie zależnie dla jakiego x ten szereg jest zbieżny. Na mocy kryterium d'Alemberta

$L > 1 \Rightarrow$ szereg jest rozbieżny

$$\left|\frac{x+3}{n+1}\right| > 1$$

zad. 1 (kryterium d'Alemberta)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot \cancel{10^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1) \cdot \cancel{10^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 \Rightarrow 0 < 1 \text{ szereg } \underline{\underline{\text{zbieżny}}}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$L = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!} \quad n^n}{(n+1)^{n+1} \quad \cancel{n!}} =$$

$$= \frac{\cancel{n+1} \cdot n^n}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \cancel{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-n-1}\right)^{-n-1}\right)^{\frac{n}{-n-1}} =$$

$$= \underline{\underline{e^{-1}}} \approx 0,36 < 1 \text{ szereg } \underline{\underline{\text{zbieżny}}}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

$$L = \cancel{\frac{(n+1)!^2}{\left(2^{n+1}\right)^2} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2}} = \left(\frac{\cancel{(n+1)\, n! \cdot 2^{n}}}{\cancel{2^{n} \cdot 2 \cdot n!}}\right)^2 =$$

$$= \cancel{\left(\frac{n+1}{2}\right)}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)!)^2}{\left(2^{(n+1)}\right)^2} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!^2} = \left(\frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}^2 \cdot 2^{n^2}}{\left(2^{(n+1)}\right)^2 \cancel{n!}^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow$$ szereg nie jest zbieżny.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$

$$L = \frac{\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{n^5}{2^n+3^n}} = \frac{(n+1)^5 \cdot (2^n + 3^n)}{n^5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{(n+1)^5 (2^n + 3^n)}{\cancel{(2^n+3^n)} + (2^n\, n^5 (2^n + 3^n + 3 + 2)} = \frac{(n+1)^5 (2^n + 3^n)}{n^5 (2^n + 3^n + 5)} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)}{n}\right)^5 \cdot \left(\frac{2^n + 3^n + 5 - 5}{2^n + 3^n + 5}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \left(1 - \frac{5}{2^n + 3^n + 5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}}\right)^5 \left(1 - \underbrace{\frac{5}{2^n+3^n+5}}_{\to 0}\right) = 0 \Rightarrow < 1$$ szereg zbieżny

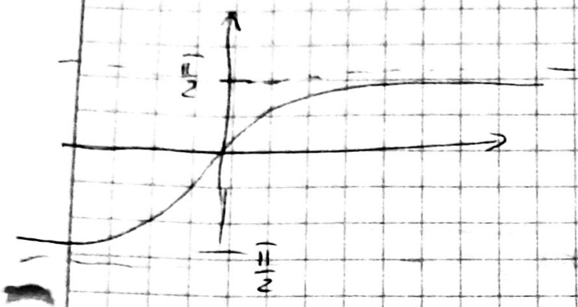
zad 2 (Kryterium Cauchy'ego) $\longrightarrow$ $\boxed{C = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathrm{arctg}(n^2+1)^n)$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\mathrm{arctg}(n^2+1)^n|} = \limsup_{n\to\infty} |\mathrm{arctg}(n^2+1)| = \frac{\pi}{2} = 1{,}5 < 1$$

FAŁSZ

szereg rozbieżny



c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{2n+1}\right|^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^{\to 1}}{\cancel{n}\underbrace{(2+\frac{1}{n})}_{\to 2}} = \frac{1}{2} < 1$$

szereg zbieżny

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{3}\right)^n$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{3}\right)^n} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^* = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}(1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}})^{\to 1}}{\cancel{n}}\right) =$$

Kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left(\sqrt[n]{\left| \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot 2^n \right|} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot 2 \right) = \lim_{n\to\infty} \sup \left(\left(\frac{\cancel{n} \cdot 1}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})} \right)^2 \cdot 2 \right) = 2 \Rightarrow$$

$2 > 1$ szereg rozbieżny

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left| \left(\frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \right) \right|} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n!}{n^2} =$$

$n^{n^2} = (n^2)^n$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n!}{n^2} \; ? \; 0 \quad \text{szereg rozbieżny}$$

zad. 6

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^n x^n}_{a_n}$ $\qquad \{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^2 \cdot x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2n^{n^2} x^2$$

19/12

Zajęcia nr 8

Program zajęć: *pojęcie granicy funkcji, granice jednostronne, definicja ciągłości funkcji*

Zadanie 1. Wyznacz punkty skupienia następujących zbiorów:

✓ a) $A = (0, 1)$

b) $B = (0, 1) \cup (1, 2)$

(*) c) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

~~d) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$~~

Zadanie 2. Korzystając z definicji (w sensie Cauchy'ego i w sensie Heinego) pokaż, że $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, gdzie:

✓ a) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$, $g = 3$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $x_0 = 2$, $g = \frac{3}{5}$

Zadanie 3. Pokaż, że następujące granice nie istnieją:

(*) a) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

✓ b) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Zadanie 4. Oblicz następujące granice:

✓ a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

✓ c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

d) $\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

e) $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{114x + 1}{x}\right)$

Zadanie 5. Oblicz następujące granice:

✓ a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

Zadanie 6. Oblicz:

a) $\lim_{x \to -\infty} x^2$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{3x^2 + 1}$

d) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + x}$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

Zadanie 7. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0. \end{cases}$$

Zbadaj istnienie granicy funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. W których punktach funkcja f jest ciągła?

19/12

$D \subseteq \mathbb{R}$

<u>DEF</u> Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru D, o ile istnieje ciąg x_n o wyrazach w $D \setminus \{a\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

<u>zad. 1</u>

$A = (0,1)$

$\lim_{n\to\infty} 0 + \frac{1}{n+1} = 0$, co więcej $\frac{1}{n+1} \in (0,1)$

$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, co więcej $\frac{1}{n+1} \in (0,1)$ $\forall_{n \geq 1}$

Stąd wynika że ~~(0,1)~~ 0, 1 są punktami skup. zb. A.

Twierdzimy, że jeśli $x \in (0,1)$, to x także jest punktem skupienia zbioru A.

Ustalmy $x \in (0,1)$

Szukamy liczby naturalnej n_x takiej, że $x + \frac{1}{n_x} < 1$

$x \cdot n_x + 1 < n_x$

$x n_x - n_x < -1$

$n_x (x-1) < -1 \quad | : (x-1)$

$n_x > -\frac{1}{(x-1)}$

$n_x > \frac{1}{1-x}$

$\forall_{x \in} (x-1) < 0.$

$n_x = \left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor + 1$

Dla tak wybranego n_x zachodzi $x + \frac{1}{n_x} < 1$

Stąd $x + \frac{1}{n_x + n} < 1$ dla dowolnego $n \geq 1$

Wobec tego $x + \frac{1}{n_x + x} \in (0,1) \setminus \{x\}$ oraz $x + \frac{1}{n_x + x} \xrightarrow{n \to \infty} x$

Żadna inna liczba nie jest punktem skupienia zbioru A.

→ Jeśli $\forall_n \; a_n \leq a$, to $\lim_{n \to \infty} a_n \leq a$

→ Jeśli $\forall_n \; a_n \geq a$, to $\lim_{n \to \infty} a_n \geq a$.

b) $[0,2]$

c) $\mathbb{R}$ ⇒ Rozwiązać (*)

$D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia zb. D.

$f : D \to \mathbb{R}$

DEF. (Heinego)

Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji f w punkcie a, o ile dla każdego ciągu x_n o wyrazach w zbiorze $D \setminus \{a\}$ takiego, że $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ zachodzi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$

zad 2

a) ~~Heinego~~

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x+1$

Pokażemy, że granicą w punkcie $x_0 = 1$, $g = 3$

Niech x_n będzie ciągiem o wyrazach w $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$ i takim, że jego granica jest równa 1 ($\lim_{n\to\infty} x_n = 1$)

Musimy pokazać, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2\underset{\downarrow 1}{(x_n)}+1 = 3.$$

cnd.

DEF (Cauchy'ego granicy funkcji)

$D \subseteq \mathbb{R}$

$f: D \to \mathbb{R}$

Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji f w punkcie a,

o ile

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D \setminus \{a\}} |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

a) Cauchy'ego

Ustalmy $\varepsilon > 0$

Szukamy $\delta > 0$ takiej, że $\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}} \quad |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}} \quad |x-1| < \delta \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon$

$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}} \quad |x-1| < \delta \Rightarrow 2|x-1| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$|x-1| < \delta \Rightarrow 2|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Downarrow$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$

$|x-1| < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow 2|x-1| < \varepsilon$

$|x-1| < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon.$

zad. 3

b) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Jeśli istnieją dwa ciągi x_n, y_n o wyrazach $D \setminus \{a\}$
takie, że $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = a$ ale $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$

to taka ~~granica~~ f nie ma granicy w punkcie a.

Szukamy ciągów x_n, y_n o wyrazach w $R \setminus \{0\}$
takich, że $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = 0$,

ale $\lim_{n \to \infty} \frac{|x_n|}{x_n} \neq \lim_{n \to \infty} \frac{|y_n|}{y_n}$

V $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} -\frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} \neq \lim_{n \to \infty} \frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \neq \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}$$

$$1 \neq -1$$

zad. 4

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \frac{9-1}{3-1} = 4.$

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 3$

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$

c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{(x-10)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-10} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n-3}{x_n-10} = \frac{2-3}{2-10} = +\frac{1}{8}$$

$x^2-5x+6=0$

$\Delta = 25-4\cdot 1\cdot 6$

$\Delta = 1$

$x_{1,2} = \frac{5\pm 1}{2}$ — 3, 2

$x^2-12x+20=0$

$\Delta = 144-4\cdot 1\cdot 20$

$\Delta = 144-80$

$\Delta = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$x_{1,2} = \frac{12\pm 8}{2}$ — 10, 2

zad. 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} \frac{x}{\sin 3x}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 3x}$$

9|01

Zajęcia nr 9

Program zajęć: *ciągłość funkcji, własność Darboux, obliczanie pochodnej funkcji z definicji, techniki obliczania pochodnych*

Zadanie 1. Sprawdź, czy następuje funkcje są ciągłe na $\mathbb{R}$:

V a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geqslant 0 \\ 4x+1, & x < 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

Zadanie 2. Dobierz parametry a i b tak aby funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2-9}{x^2-x-6} + ax + b, & 0 < x \leqslant 3 \\ (x-3)^2, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

była ciągła na całej prostej rzeczywistej.

V **Zadanie 3.** Uzasadnij, że każdy wielomian nieparzystego stopnia posiada miejsce zerowe.

Zadanie 4. Uzasadnij, że wielomian $P(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ posiada trzy różne miejsca zerowe.

Zadanie 5. Uzasadnij, że równanie $(1-x)\cos x = \sin x$ ma rozwiązanie znajdujące się w przedziale $(0,1)$.

Zadanie 6. Uzasadnij, że wśród prostokątów o obwodzie 1 istnieje taki, który ma największe pole. Znajdź ten prostokąt.

V **Zadanie 7.** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(a)f(b) < 0$. Uzasadnij, że funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale (a,b) i zaprojektuj algorytm wyznaczania tego miejsca zerowego z zadaną dokładnością.

V **Zadanie 8.** Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$.

Zadanie 9. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie 10. Zbadaj istnienie pochodnej funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 4x+2, & x < 1 \\ 2x^2+4, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 1$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}^{1} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{3x}{3x} =$

$= \lim_{x \to 0} \cancel{f(x)} \ \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{1} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

zad. 6.

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x}{3x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}(\overbrace{1+\frac{1}{x^2}}^{1})}{\cancel{x^2}(\underbrace{3+\frac{1}{x^2}}_{1})} = \frac{1}{3}$

<u>zaj. 9</u> 9|01|2019

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

Def. f jest ciągła w punkcie x_0:

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x \in (x_0-\delta, \ x_0+\delta)} \ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

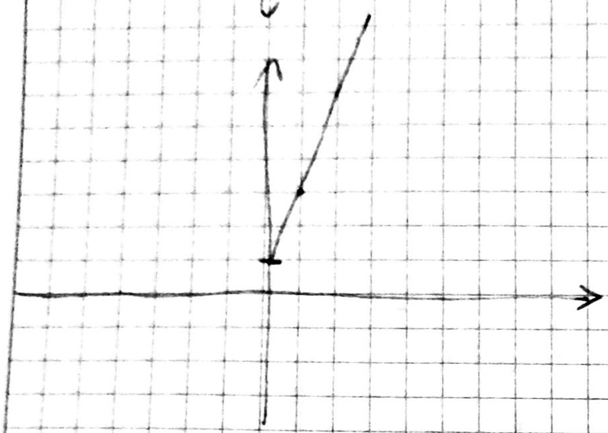
$$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Leftrightarrow |x-x_0| < \delta$$

Def. Mówimy że funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma granicę g (skończoną) w punkcie x_0 jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} \ |g - f(x)| < \varepsilon \qquad g = f(x_0)$$

zad. 1

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geqslant 0 \\ 4x+1, & x < 0 \end{cases}$



I $x_0 \neq 0$

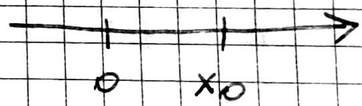
$x_0 > 0$

$f(x_0) = 2x_0 + 1$

Wybieramy dowolny $\varepsilon > 0$

Wybieramy $\delta < |0 - x_0|$ i $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$



$$|2x_0 + 1 - (2x+1)| < \varepsilon$$
$$|2(x_0 - x)| < \varepsilon$$
$$2|x_0 - x| < \varepsilon$$
$$|x_0 - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Downarrow$$

Jeśli weźmiemy $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ($\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$) to będzie ok.

$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, |x_0| \right\}$

$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \\ x_0 = 10 \\ \delta = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (0, 20)$

Zatem

$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x_0 - x| < \varepsilon$

$|x_0 - x| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (10 - \frac{\varepsilon}{2}, 10 + \frac{\varepsilon}{2})$

Własność Darboux

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - funkcja ciągła (czyli ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$)

Tw. Darboux

Jeśli dla $a, b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$ $f(a) f(b) < 0$, to istnieje $c \in (a,b)$, że $f(c) = 0$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$\Downarrow$

Dowolne wielomiany są ciągłe

Zad. 3 Każdy wielomian nieparzystego stopnia posiada miejsce zerowe.

$P(x) = a_{2k+1} x^{2k+1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$

$= x^{2k+1} \left(a_{2k+1} + \frac{a_{2k}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^{2k+1}} \right)$ $\lim\limits_{x \to \infty \text{ lub } x \to -\infty}$

$+\infty$ $-\infty$ 0

Zauważamy, że dla $x \to \infty$, $P(x) \to \infty$, tym że istnieje $b \in \mathbb{R}$, że $f(b) > 0$.

Zauważymy, że dla $x \to -\infty$, $P(x) \to -\infty$ tym, że istnieje $a \in \mathbb{R}$, że $f(a) < 0$. Czyli spełnione są założenia tw. Darboux' istnieje $c \in (a,b)$, że $P(c) = 0$

$\boxed{\text{dokończenie 1a)}}$

Wybieramy $\frac{\varepsilon}{4}$

II $x_0 < 0$

— " — $\delta \leq |x_0 - 0|$ i $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$f(x_0) = 4x_0 + 1$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta)}{\forall} \ |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$\delta \leq |x_0|$ i

$$|4x_0 + 1 - (4x+1)| < \varepsilon$$

$$|4(x_0 - x)| < \varepsilon$$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Updownarrow$

$$4|x_0 - x| < \varepsilon \Leftarrow |x_0 - x| < \delta$$

$|x - x_0| < \delta$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, |x_0|\right\}$$

III $x_0 = 0$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in(-\delta,\delta)}{\forall} \ |1 - f(x)| < \varepsilon$$

$f(0) = 2\cdot 0 + 1 = 1$

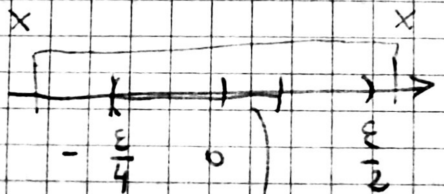
1° $x > 0 \Rightarrow$ $|1 - f(x)| = |1 - 2x - 1| = |2x| < \varepsilon$

$|x| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$

2° $x < 0 \Rightarrow$ $|1 - f(x)| = |1 - 4x - 1| = |4x| < \varepsilon$

$|x| < \frac{\varepsilon}{4} \Leftrightarrow x \in (-\frac{\varepsilon}{4}, 0)$

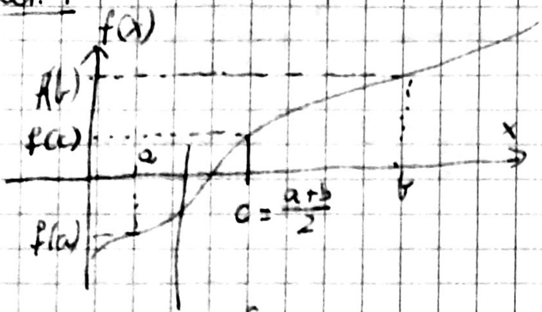
$1^\circ \vee 2^\circ \Rightarrow x \in (-\frac{\varepsilon}{4}; \frac{\varepsilon}{2})$ dla $|1 - f(x)| < \varepsilon$



FUNKCJA JEST CIĄGŁA W KAŻDYM PUNKCIE.

$x \in (-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}) \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{4}$

zad. 7



$|f(c) - f(b)| < \varepsilon_0$

$|c - a| < \varepsilon_0$

$d = \frac{c}{2}$ itd aż dojdę do miejsca zerowego funkcji

PSEUDOKOD

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$ → przerwany starte.

while $|f(c) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$

albo

$|c - a| \geqslant \varepsilon_0$

if $f(c) > 0$

$b \leftarrow c$

else

$a \leftarrow c$

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

return c.

POCHODNA FUNKCJI

DEF $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie x_0, $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli istnieje (jest skończona) granica

$$g = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Jeśli ta granica g istnieje to pochodną funkcji f w punkcie x_0 jest g. Oznaczenie $f'(x_0) = g$.

zad. 8

KOL $\Rightarrow$ $\boxed{30.01}$

06.02 $\Rightarrow$ Dodatkowe zajęcia
10:00

$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}}\left(\frac{4}{h} + 1\right)}{\cancel{h}_1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(\frac{4}{h} + 1\right)}{1} = \lim_{h\to 0} 4 + h = 4 = 4.$$

zad. 9

$f(x) = \sqrt{x}\ , \quad x_0 = 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} =$$

$=$

Zajęcia nr 10

Program zajęć: *techniki obliczania pochodnych, twierdzenie o wartości średniej, styczna do wykresu funkcji*

Zadanie 1. Oblicz pochodne następujących funkcji:

✓ a) $f(x) = x^2+x^7+\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{x}$ ✓ b) $f(x) = \sin x + 4\cos x$ ✓ c) $f(x) = 2\ln x - 3\,\mathrm{arctg}\, x$

✓ d) $f(x) = x^2(3\ln x - 14\sqrt{x})$ ✓ e) $f(x) = e^x \,\mathrm{ctg}\, x$ ✓ f) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

✓ ? g) $f(x) = e^{x^2+1}$? h) $f(x) = \sin(\cos 4x)$ ✓ i) $f(x) = \sin 3x \frac{2x}{x^2+1}$

? j) $f(x) = (1+14\sqrt{x})^{11}$ k) $f(x) = \frac{xe^{\sqrt{x}+4}}{\cos(14x)+4}$ l) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)}$ ✓

* m) $f(x) = x^x$ * n) $f(x) = (2x+3)^{1-x}$ o) $f(x) = \mathrm{arctg}(2x+3)$

Zadanie 2. Oblicz pochodną funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ -x^3, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

✓ **Zadanie 3.** Znajdź styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 3$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie 4. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^3}{3}$ równoległych do prostej $y = 4x + 10$.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $f(0) = -3$ i $f'(x) \geqslant 2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Co możemy powiedzieć o $f(1)$?

Zadanie 6. Drogę przebytą przez punkt materialny opisuje funkcja $s : [0,\infty] \to [0,\infty]$, $s(t) = t^2 + 2t$. Wyznacz prędkość tego punktu w chwili $t_0 = 1$.

Zajęcia nr 11

***Program zajęć:** ekstrema lokalne, monotoniczność funkcji, zadania optymalizacyjne, pokazywanie nierówności*

Zadanie 1. Wyznacz ekstrema lokalne i zbadaj monotoniczność funkcji:

✓ a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$

c) $f(x) = e^{x^2+1}(2x^2 - 3)$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Zadanie 2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-10}}$$

w przedziale $[1, 3]$.

Zadanie 3. W kulę o promieniu R wpisz stożek o największej objętości.

Zadanie 4. Jakie wymiary powinno mieć naczynie w kształcie otwartego walca o objętości V i grubości ścinek a, tak aby ilość materiału potrzebnego do jego produkcji była najmniejsza?

Zadanie 5. Pokaż, ze funkcja $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $(2, +\infty)$.

Zadanie 6. Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2).$$

Zadanie 7. Pokaż, że

$$2 \ln x < x - \frac{1}{x}$$

dla $x > 1$.

Zadanie 8. Oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sqrt[3]{63}$

b) $\sin(59°)$

<u>TW.</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f jest różniczkowalna na (a,b)

* jeśli $\forall_{x \in [a,b]}\ f'(x) > 0$, to f jest rosnąca
* jeśli $\forall_{x \in [a,b]}\ f'(x) < 0$, to f jest malejąca

<u>DEF</u> Powiemy, że punkt $x_0 \in D$ jest min lokalnym funkcji o ile $\exists_{\delta > 0}\ \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}\ f(x_0) \leq f(x)$.

POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ jest stałą
- $(a^x)' = a^x \ln a$ $[a > 0, a \neq 1]$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $[a > 0, a \neq 1]$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

REGUŁY RÓŻNICZKOWANIA

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f \circ g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

zaj. 10

1.

a) $f(x) = x^2 + x^7 + \frac{1}{x^2} + 3\sqrt{x}$

$f'(x) = 2x + 7x^6 + (x^{-2})' + (3\sqrt{x})'$

$f'(x) = 2x + 7x^6 + -2x^{-3} + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$

b) $f(x) = \sin x + 4\cos x$

$f'(x) = (\sin x)' + 4(\cos x)'$

$f'(x) = \cos x + -4\sin x = -4\sin x + \cos x$

c) $f(x) = 2\ln x - 3\operatorname{arctg} x$

$f'(x) = 2(\ln x)' - 3(\operatorname{arctg} x)'$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 3\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} =$

$= \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{1} =$

$= \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} =$

$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = x^2(3\ln x - 14\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{2x(3\ln x - 14\sqrt{x}) + (3\ln x - 14\sqrt{x})' x^2}{1} =$

$= 2x(3\ln x - 14\sqrt{x}) + (3(\ln x)' - 14(\sqrt{x})')x^2 =$

$= 6\ln x \cdot x - 28\sqrt{x} + \left(\frac{3}{x} - 14 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)x^2 =$

$= 6\ln x \cdot x - 28\sqrt{x} + \left(\frac{3}{x} - 7x^{\frac{1}{2}}\right)x^2 = 6x\ln x - 28\sqrt{x} + 3x - 7x^{2\frac{1}{2}}$

e) $f(x) = e^x \operatorname{ctg} x$

$f'(x) = e^x \operatorname{ctg} x + e^x(\operatorname{ctg} x)' = e^x \operatorname{ctg} x + e^x - \frac{1}{\sin^2 x} =$

$= e^x\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

f)

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-3) - (x+1)(x-3)'}{(x-3)^2} =$

$= \frac{x-3-(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$

g) $f(x) = e^{x^2+1}$.

$g(x) = e^x$

$h(x) = x^2+1$ $\Rightarrow f'(x) = g(h(x))$

$\cancel{f'(x) = x^2+1}$

$f'(x) = g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x) =$

$e^x \quad , \quad x^2+1$

$= e^{x^2+1} \cdot 2x$

$\cancel{f'(x) = f'(}$

$f'(x) = x^2+1 \cdot e^{x^2+1} \cdot e^{x^2+1} = (e^{x^2+1})^2 (x^2+1+)' = e^{x^2+1} \cdot 2x.$

h) $f(x) = \sin(\cos 4x)$

$f'(x) = (f \circ g)'x = f'(g(x))g'(x)$

$f(x) = \sin x \;,\; \cos 4x$

$f'(x) = f'(\cos 4x) \cdot - \sin 4x = \cancel{\cos}\ \sin$

j) $f(x) = (1 + 14\sqrt{x})^{11}$

$f'(x) = 11(1+14\sqrt{x})' = 11(1+14\sqrt{x}) \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} =$

$= 11(1+14\sqrt{x}) \cdot 7x^{-\frac{1}{2}}$

h)

$f(x) = \sin(\cos 4x)$

$g(x) = \sin x \xrightarrow{\quad ' \quad} \cos x$

$h(x) = \cos 4x \qquad (*)\ -4\sin 4x$

$f'(x) = g'(h(x)) = g'(h(x))\cdot h'(x) = \cancel{\cos x}\ \cancel{\cos(-\sin 4x) - \sin}$

$= \cos(\cos 4x)\cdot \overset{h'(x)}{\cancel{\sin 4x}} = \cos(\cos 4x)\cdot -4\sin 4x.$

i) ~~f(x)'=~~ $(*)\ h(x) = \cos 4x \Rightarrow h'(x) = z'(y(x)) = z'(y(x))\cdot y'(x) =$

$z(x) = \cos x \qquad = -\sin 4x\cdot 4 = -4\sin 4x$

$y(x) = 4x$

i) $f(x) = \sin 3x \quad \frac{2x}{x^2+1}$

$(\sin 3x)' = \cancel{\sin x} \quad \cos 3x\cdot 3 = 3\cos 3x.$

$\Downarrow$

$\sin x$

$3x$

$$f'(x) = \frac{\sin 3x\cdot 2x}{x^2+1} = \frac{(\sin 3x)'\,2x - \sin 3x\cdot(2x)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3\cos 3x\cdot 2x - 2\sin 3x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x\cos 3x - 2\sin 3x}{(x^2+1)^2}$$

j) $f(x) = (1+14\sqrt{x})^{11}$

$\Downarrow$

$(11+14\sqrt{x})^{x}$

11

$f'(x) = 10(1+14\sqrt{x})\cdot(1+14\sqrt{x})' = 10(1+14\sqrt{x})\cdot 14\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} =$

$= 10(1+14\sqrt{x})\cdot 7x^{-\frac{1}{2}}.$

i) $f(x) = \sin 3x \cdot \frac{2x}{x^2+1}$

$f'(x) = (\sin 3x)' \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \sin 3x \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' =$

$= 3\cos 3x \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \sin 3x \cdot \frac{2(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{6x\cos 3x}{x^2+1} + \frac{\sin 3x\,(\cancel{2x^2} + 2 - \cancel{2x^2})}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{6x\cos 3x}{x^2+1} + \frac{2\sin 3x}{(x^2+1)^2}.$

PORACHOWAĆ ZAD. 1 Z ZBIÓR ZADAŃ KRYSICKIEGO.

$f'(x_0) = a \Rightarrow$ współczynnik kierunkowy stycznej w p. x_0.

<u>zad. 3</u>

$f(x) = x^2 + 3 \quad , \quad x_0 = 1$ $\qquad \boxed{f(x) = ax+b}$

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2$

Punkt o współrzędnych $(1, f(1))$ należy do szukanej prostej

$f(1) = 1 + 3 = 4.$

$f(x) = ax+b \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + b$

$4 = 2 + b \Rightarrow b = 2$

styczna $\Leftarrow f(x) = 2x + 2.$

zoud. 6

$s(t) = t^2 + 2t$ $\quad$ $v = \frac{s}{t} \Rightarrow \underline{\underline{vt = s.}}$

$a = s'(t) = 2t + 2$

$f(x) = ax + b$

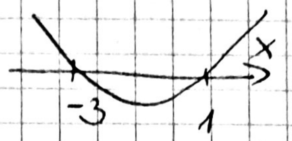
$vt = (2t+2)x + b$

zad. 11

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$

$x_{1,2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$



	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$f(x)$ jest ros $\Leftrightarrow$ $x \in (-\infty;-3)$ $x \in (1;+\infty)$

$f(x)$ mal $\Leftrightarrow$ $x \in (-3;-1)$

$f(x)_{min} = f(1) = 1 + 3 - 9 - 2 = 4 - 11 = -7$

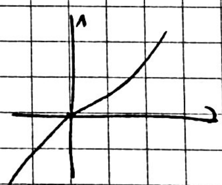
$f(x)_{max} = f(-3) = -27 + 27 + 9 + -2 = 7$

TW. $f: D \to R$ różniczkowalne

Jeśli: funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$

EX $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ $f'(0) = 0$



to nie jest ekstremum.

TW (C.D)

* Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz:

$\forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0)}$ $f'(x) < 0$

$\forall_{x \in (x_0, x_0 + \delta)}$ $f'(x) > 0$

zad. 2

$$f(x) = \cancel{x}\; e^{\frac{x^2}{x^2-10}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-10}} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-10}\right)' = e^{\frac{x^2}{x^2-10}} \cdot \frac{(x^2)'(x^2-10) - (x^2-10)'x^2}{(x^2-10)^2} =$$

$\Downarrow$

e^x

$\frac{x^2}{x^2-10}$

$$= \frac{2x(x^2-10) - 2x^3}{(x^2-10)^2} \cdot e^{\frac{x^2}{x^2-10}} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - 20x - \cancel{2x^3}}{(x^2-10)^2} \cdot e^{\frac{x^2}{x^2-10}} =$$

$$= \frac{-20x}{(x^2-10)^2} \cdot e^{\frac{x^2}{x^2-10}}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-20x}{(x^2-10)^2} \cdot e^{\frac{x^2}{x^2-10}} = 0$$

Zajęcia nr 13

***Program zajęć:** podstawowe techniki obliczania całek nieoznaczonych*

Zadanie 1. Oblicz następujące całki nieoznaczone:

a) $\int x + 3x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} dx$ b) $\int \sin x + \cos x + \frac{1}{x^2+1} dx$ c) $\int e^{3x+1} + \frac{1}{x} dx$

d) $\int \cos(14x + 7) dx$ e) $\int \frac{1}{2x^2+5} dx$ f) $\int \frac{(x+1)^3}{x} dx$

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie, oblicz następujące całki nieoznaczone:

a) $\int x^2 e^{x^3} dx$ b) $\int \sin^3 x dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

d) $\int (1+x)^{10} dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$ f) $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$

Zadanie 3. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części, oblicz następujące całki nieoznaczone:

a) $\int (x+1)e^{x+2} dx$ b) $\int x^6 \ln x dx$ c) $\int (x^2+2) \cos x dx$

d) $\int e^x \sin x dx$ e) $\int \ln x dx$ f) $\int (x+1)^3 e^x dx$

Zadanie 4. Oblicz następujące całki nieoznaczone:

~~a)~~ $\cancel{\int \operatorname{arctg} x dx}$ b) $\int x^3 e^{x^2} dx$

c) $\int \ln^2 x dx$ d) $\int \frac{1}{x^2+2x+10} dx$

$6.02 \Rightarrow 10^{\infty}$

zad. 1

a) $\int (x + 3x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}) dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{3} + \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{x^2}\right) dx =$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{3} + \frac{x^{1\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C$

Całka nieoznaczona ≡ f. pierwotna

$f: D \to R$

$F: D \to R$ jest funkcją pierwotną funkcji f, o ile $F'(x) = f(x)$

KOLOKWIUM

1) PUNKTY SKUP.
2) Granica funkcji
3) Ciągłość funkcji
4) Pochodna funkcji
5) Ekstremum funkcji
6) Całki nieoznaczone.

b) $\int (\sin x + \cos x + \frac{1}{x^2+1}) dx =$

$= -\cos x + \sin x + \int \frac{1}{x^2+1} =$

$= -\cos x + \sin x + \int \frac{1}{x^2+1} =$

$= -\cos x + \sin x + \operatorname{arctg} x + C$

d) $\int \cos(14x+7) dx = \int \cos(14x+7) dx = \frac{\sin(14x+7)}{14} + C$

$t = 14x+7$

$(\sin(14x+7))' = 14\cos(14x+7)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

f) $\int \frac{(x+1)^3}{x} dx = \int \frac{(x+1)^2 (x+1)}{x} dx = \int \frac{(x^2+2x+1)(x+1)}{x} dx =$

$= \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1}{x} dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x} dx =$

$= \int \left(x^2 + 3x^{\cancel{2}} + 3 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x + \ln|x| + C$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODST.

zad. 2

a) $\int x^2 e^{x^3} dx = \int \frac{1}{3} e^t dt = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{x^3} + C$

$x^3 = t \quad)'$

$\cancel{3}x^2 dx = dt$

$x^2 dx = \frac{1}{3} dt$

opr: $\left(\frac{1}{3}e^{x^3}\right)' = \frac{1}{3}\left(e^{x^3}\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} e^{x^3} \cdot \cancel{3}x^2$

~~b)~~ c) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

$\cancel{t = \ln x}$

$\cancel{dt = \frac{1}{x} dx \,/\cdot x}$

$\cancel{x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{\;} \frac{1}{dt}} \cdot dx$

$\ln x = t \quad | d$

$\frac{1}{x} d\cancel{x} = dt$

$\cancel{x \cdot c}$

$\cancel{\left(\frac{\ln^2 x}{2}\right)' = \frac{(\ln^2 x)' 2}{\;} \frac{1}{2}(\ln^2 x)' = \frac{1}{2}}$

$\left(\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^2\right)' = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}.$

f) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \int \frac{x^3}{1} \cdot \frac{1}{1+x^4}\,dx =$

$t = 1+x^4 \mid d$

$dt = 4x^3 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{4}\,dt$

$= \int \frac{dt}{t} \cdot = \int \frac{1}{4t}\,dt = \frac{1}{4}\ln t + C = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$

$= \frac{1}{4\ln(1+x^4)} + C$

b) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx =$

$= \int \sin\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx$

zad.3

a) $\int (x+1)e^{x+2}\,dx = \begin{vmatrix} (x+1) & e^{x+2} \\ 1 & e^{x+2} \end{vmatrix} =$

$= (x+1)(e^{x+2}) - \int e^{x+2} = (x+1)e^{x+2} - e^{x+2} + C =$

$= xe^{x+2} + C$

b) $\int x^6 \ln x\,dx = \begin{vmatrix} x^6 & \ln x \\ 6x^5 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$

$= x^6 \cdot \frac{1}{x} - \int 6x^5 \cdot \frac{1}{x} = x^5 - \int 6x^4 \cancel{+C} =$

$= x^5 - 24x^3 + C$

b) $\int x^6 \ln x \, dx = \int \ln x \; x^6 \, dx = \begin{vmatrix} \ln x & x^6 \\ \frac{1}{x} & \frac{\cancel{7}x^7}{7} \end{vmatrix} =$

$= \ln x \cdot \frac{x^7}{7} - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{7}x^{\cancel{7}\,6}}{7} = \frac{x^7}{7} \ln x - \frac{1}{7} \int x^6 =$

$= \frac{x^7}{7} \ln x - \frac{1}{7} \cdot 6x^5 = \frac{x^7}{7} \ln x - \frac{6x^5}{7}.$

c) $\int (x^2+2) \cos x \, dx = \begin{vmatrix} (x^2+2) & \cos x \\ 2x & \sin x \end{vmatrix} =$

$= 2x \cos x - \int 2x \cdot \sin x$

$\cancel{\begin{vmatrix} 2x & \sin x \\ 2 & -\cos x \end{vmatrix} = 2 \sin x - \int 2 \cos x}$

---

c) $\int (x^2+2) \cos x \, dx = \begin{vmatrix} x^2+2 & \cos x \\ 2x & \sin x \end{vmatrix} =$

$= (x^2+2) \sin x - \int 2x \, \cancel{\cos x} \, \sin x \, dx = (x^2+2) \sin x - \begin{vmatrix} \sin x & 2x \\ -\cos x & 2 \end{vmatrix} =$

$= (x^2+2) \sin x - \left(2 \sin x - \int 2 \cos x\right) =$

$= (x^2+2) \sin x - \left(2 \sin x + 2 \sin x\right) = (x^2+2) \sin x - 4 \sin x$

c) $\int (x^2+2)\cos dx =$

$= \begin{vmatrix} x^2+2 & \cos x \\ 2x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x(x^2+2) - \int 2x \cdot \sin x =$

$= [\sin x](x^2+2) - \begin{vmatrix} 2x & \sin x \\ 2 & -\cos x \end{vmatrix} =$

$= (\sin x)(x^2+2) - \left(-2x\cos x - \int -2\cos x\right) =$

$= (\sin x)(x^2+2) - \left(-2x\cos x + 2\int \cos x\right) =$

$= (\sin x)(x^2+2) + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

e) $\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx = \begin{vmatrix} \ln x & 1 \\ \frac{1}{x} & x \end{vmatrix} =$

$x\ln x$

$= \cancel{\frac{1}{x} x} - \int \frac{1}{x} \cdot x = x\ln x - \int 1 = x\ln x - x$

---

*Npkt
*

$\int_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_1^2 = x^2 dx$

$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \cancel{dt}$

$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$